ZEITSCHRIFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK
INGENIEURWISSENSCHAFTLICHE FORSCHUNGSARBEITEN
Band 6 Juni 1926 Heft 3

Inhalt:

HAUPTAUFSÄTZE

Die Knicksicherheit von Rahmentragwerken.

Von **R. v. MISES** in Berlin und **J. RATZERSDORFER** in Breslau.

Die vorliegende Abhandlung gibt die ausführlichere Darstellung des zweiten Teils der im Marburger Vortrag von v. Mises entwickelten Stabilitätstheorie[1]). In unserer voraufgegangenen Arbeit[2]) wurde die Knicksicherheit idealer Fachwerke (mit reibungslosen Gelenken) eingehend behandelt, bei denen nur Längenänderungen der Stäbe in Betracht gezogen werden. Der reinen Fachwerkknickung wird jetzt zunächst (**1** bis **6**) die reine Rahmenknickung gegenübergestellt, bei der die einzelnen Stäbe biegungssteif, aber keiner Dehnung fähig sind. Die Zusammenfassung beider Ansätze, die Berücksichtigung der Längenänderungen bei biegungssteifen Stäben, ergibt dann (**7** bis **9**) eine vollständige Stabwerktheorie. Diese ist für jedes Stabwerk mit steifen oder gelenkigen Knoten immer anwendbar; will man jedoch der Einfachheit halber einen speziellen Ansatz benützen, so muß man in jedem Fall besonders überlegen, was zutreffend bleibt. Der Rahmenbalken kann natürlich nicht als Fachwerk berechnet werden, da er dann keine Tragkraft hätte. Wird andererseits der Gitterträger als reines Rahmentragwerk aufgefaßt, so könnten die Knoten keine gegenseitigen Verschiebungen erfahren und die Knickgrenze wäre erst erreicht, wenn der einzelne Gurtstab ausknickt. Beim Gitterträger mit Diagonalstäben kann man aber beispielsweise diese in den Gurtstäben als gelenkig eingehängt ansehen. An der vollständigen Theorie gemessen wird im allgemeinen die Tragkraft unterschätzt, sobald man ein bestimmtes Stabsystem als Fachwerk, überschätzt, sobald man es als reinen Rahmen rechnet.

Im folgenden beschränken wir uns auf die Untersuchung ebener Rahmentragwerke. Eine Erweiterung dieses zweiten Teils der Stabilitätstheorie auf das räumliche Problem bietet keine grundsätzlichen Schwierigkeiten, ist aber mit Rücksicht darauf, daß die praktischen Aufgaben fast nur ebene Tragwerke betreffen, von uns vorläufig zurückgestellt worden.

Text und Abbildungen des folgenden Aufsatzes sind nach einem kurzen Entwurf von R. v. Mises von J. Ratzersdorfer ausgeführt worden. Die Durchrechnung der Bei-

[1]) Diese Zeitschr. Bd. 3 (1923), S. 106. — [2]) Bd. 5 (1925), S. 218.

spiele und die Gegenüberstellung der bisher in der Literatur vorliegenden Ergebnisse rührt im wesentlichen von dem zweitgenannten Verfasser her.

1. Die Hauptgleichungen des ebenen Problems. Die Grundlage der Berechnung bilden drei Beziehungen, die wir aus der Biegungstheorie gerader Stäbe ableiten.

Wir betrachten einen Stab von der Länge l, der durch die axiale endliche Druckkraft P und die axiale unendlich kleine Zusatzkraft S beansprucht ist und an dessen Enden die unendlich kleinen Biegungsmomente M_a bzw. M_b und die unendlich kleine Querkraft Q wirken. Den Stab beziehen wir auf ein rechtwinkeliges Koordinatensystem u, v, wobei die u-Achse mit der Stabachse zusammenfällt (Abb. 1). Mit der Annahme, daß der Stab in seiner Ebene, die eine Biegungshauptebene sei, nur kleine Ausbiegungen erfährt, genügt entsprechend Abb. 1 die Ausbiegung v als Funktion der Abszisse u der Differentialgleichung

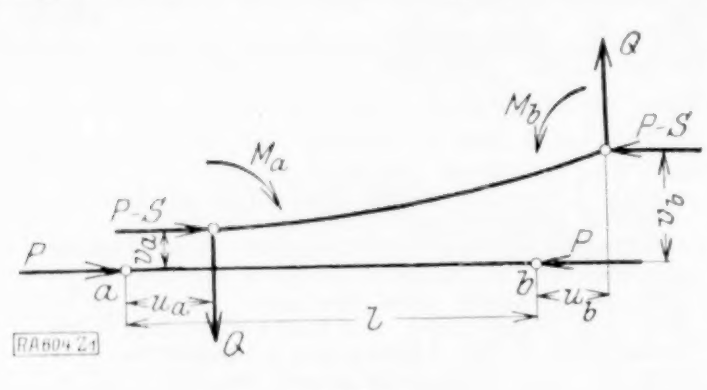


Abb. 1.

$$v'' = \frac{M}{E\,J} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

M ist das Biegungsmoment im Querschnitt u, v, J das Trägheitsmoment des Stabquerschnitts für die Schwerpunktshauptachse, E der Youngsche Modul (Elastizitätsmodul) des Stabmaterials. Da die Ausbiegung als klein von erster Ordnung angesehen wird, sind es auch die M_a, M_b, Q und S. Das Biegungsmoment M ist gegeben durch

$$M = M_a - Q\,u - P\,(v - v_a) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2),$$

woraus durch zweimaliges Differentieren $M'' = -P\,v''$ folgt. Aus Gl. (1) wird daher $M'' = -\frac{P}{E\,J}\,M$ und man erhält mit dem Parameter

$$z^2 = \frac{P\,l^2}{E\,J} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

unter Berücksichtigung der Grenzbedingungen: $M = M_a$ für $u = o$ und $M = M_b$ für $u = l$

$$M = M_a \cos\frac{z\,u}{l} + \frac{M_b - M_a \cos z}{\sin z}\,\sin\frac{z\,u}{l} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4).$$

Setzt man in Gl. (2) für $u = l$, so gewinnt man als die erste unserer Beziehungen eine Momentengleichung, die Gleichgewichtsbedingung

$$M_b - M_a = Q\,l + P\,(v_b - v_a) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\mathrm{I})$$

die immer erfüllt sein muß. Differentiert man die Gl. (2), so entsteht $M' = -Q - P\,v'$ und daraus mit Einführen der Grenzwerte

$$M_a' - M_b' = P\,(v_b - v_a)\,, \qquad M_a' + M_b' = 2\,Q - P\,(v_b' + v_a').$$

Berechnet man aus Gl. (4) die linken Seiten dieser Gleichungen, so gelangt man zu den beiden Hauptgleichungen des Problems, die mit den Abkürzungen

$$t\,(z) = \frac{1 - \cos z}{z \sin z}\,, \quad s\,(z) = \frac{1 + \cos z}{z \sin z} - \frac{2}{z^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

unter Beachtung von Gl. (I) sich in der Form

$$v_b' - v_a' = \frac{l}{E\,J}\,(M_b + M_a)\,t\,(z), \qquad 2\,\frac{v_b - v_a}{l} - (v_b' + v_a') = \frac{l}{E\,J}\,(M_b - M_a)\,s\,(z) \quad (\mathrm{II})$$

anschreiben lassen. Die erste Gl. (II) sagt aus, daß der Winkel zwischen den Endtangenten der Biegungslinie proportional der Summe der Endmomente ist, die zweite Gleichung zeigt, daß der Winkel zwischen der Stabsehne und der »mittleren« Tangentenrichtung proportional ist der Differenz der Endmomente [1]). In den drei Gleichungen (I) und (II), die linear und homogen in den unendlich kleinen Größen Q, M_a, M_b, v_a, v_b, v_a', v_b' sind, ist alles enthalten, was wir aus der Biegungstheorie brauchen. Die Werte von

[1]) Bei F. Bleich, Die Knickfestigkeit elastischer Stabverbindungen. Der Eisenbau Bd. 10 (1919), S. 27f und 13, (1922) S. 34f bedeutet $\frac{v_b - v_a}{l}$ den sog. »Stabdrehwinkel«.

$t(z)$ und $s(z)$ sind für jedes z explizite angebbar. Für $z = 0$, d. h. für eine verschwindende Axialkraft sind $t(z) = {}^1/_2$, $s(z) = -{}^1/_6$ und daher die Hauptgleichungen

$$v_b' - v_a' = \frac{l}{EJ}\frac{M_b + M_a}{2}, \quad 2\frac{v_b - v_a}{l} - (v_b' + v_a') = -\frac{l}{EJ}\frac{M_b - M_a}{6} \quad . \quad . \quad . \quad (\mathrm{II}')$$

wie man auch unmittelbar leicht finden kann. Ist P eine Zugkraft, so ist z imaginär und mit $z' = z\sqrt{-1}$ werden

$$t(z) = \frac{1 - \mathrm{Cos}\, z'}{\mathrm{Sin}\, z'}, \quad s(z) = \frac{1 + \mathrm{Cos}\, z'}{\mathrm{Sin}\, z'} + \frac{2}{z'^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5').$$

Es ist wichtig folgende Tatsache festzuhalten: Wird P um einen kleinen Betrag S verändert, der von gleicher Ordnung wie Q, M, v, v' ist, so tritt in z und weiter in den Abkürzungen (5) bzw. (5') ein Zusatz von dieser Größenordnung auf. In den Gleichungen (II) liefert dies nur Zusatzglieder von zweiter Ordnung. Unsere Hauptgleichungen sind also auch exakt richtig, wenn bei der Axialkraft P die unendlich kleine Zusatzkraft S vernachlässigt wird.

2. Reine Rahmenknickung ebener Tragwerke, allgemeiner Ansatz. Unter »reiner Rahmenknickung« verstehen wir einen Knickvorgang, bei dem die Längenänderungen der Stäbe infolge der Axialkräfte nicht berücksichtigt werden, die Entfernung je zweier Knoten also unverändert ist. Die Verbindungsstäbe bleiben dabei im allgemeinen nicht geradlinig, sondern gehen in Kurven über, die sich in den Knoten mit unveränderten Winkeln aneinanderschließen. Während bei der »reinen Fachwerkknickung« nur die Längenänderungen der Stäbe maßgebend sind, kommt hier nur deren Biegsamkeit zur Geltung. Man sieht leicht ein und auch der spätere Ansatz **7** zeigt es, daß eine Vernachlässigung der Längenänderungen immer dann zulässig ist, wenn die Querschnitte der Stäbe sehr klein gegenüber den Längen sind.

Wir nehmen jetzt an, es sei ein ebenes Rahmentragwerk von k Knoten und s Stäben gegeben (Abb. 2), das unter dem Einfluß bestimmter äußerer Kräfte in einen biegungsfreien Gleichgewichtszustand gelangt ist. Für jeden Stab ist eine Stabkraft bekannt, Querkräfte und Biegungsmomente sind nicht vorhanden. Völlig willkürlich darf man natürlich die äußeren Kräfte nicht annehmen; daß es aber bei jeder Stabverbindung Zustände biegungsfreien Gleichgewichts gibt, erkennt man beispielsweise an dem Rechtwinkelrahmen der Abb. 3 und 4. Im ersten Fall sind beide Ständer axial mit $P/2$ belastet, im zweiten nur der rechte Ständer mit P, der Querstab ist beidemale spannungslos. Die allgemeine Bedingung für die Möglichkeit eines biegungsfreien Gleichgewichts ist hier offenbar die, daß die wagrechten Komponenten der in den beiden oberen Knotenpunkten angreifenden Lasten einander aufheben. Auf den kräftefreien oder »natürlichen« Zustand greifen wir gar nicht zurück, so daß es auch gleichgültig ist, ob wir Längenänderungen, die während des Knickvorganges (beim Uebergang aus dem biegungsfreien in den schwach gebogenen Gleichgewichtszustand) ausgeschlossen sein sollen, für den Uebergang aus dem natürlichen in den zu untersuchenden biegungsfreien Zustand zulassen oder nicht. Nur müssen wir im ersteren Fall annehmen, daß die Fixierung der Rahmenwinkel nach Aufbringen der Belastung und Eintritt der Längenänderung erfolgt; unter der Stablänge l ist also die durch die Last P bereits veränderte Länge zu verstehen.

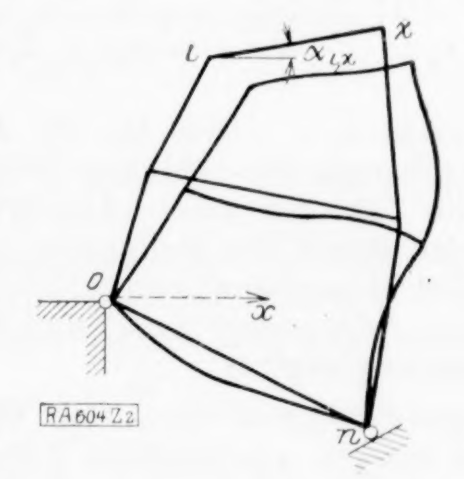


Abb. 2.

Wir untersuchen nun die Stabilität eines gegebenen, biegungsfreien Gleichgewichtszustandes. Zu diesem Zweck betrachten wir einen unendlich benachbarten Zustand und fragen, ob stets ein positiver Arbeitsaufwand erforderlich ist, um vom ersten zum zweiten Zustand zu kommen. An der Grenze zwischen stabilen und nicht stabilen Zuständen müssen solche liegen, bei denen der Uebergang zu einer Nachbarlage ohne Arbeitsaufwand möglich ist, wo sich also in unendlicher Nachbarschaft des biegungsfreien Zustands wieder ein Gleichgewichtszustand befindet. Dieser muß nicht mehr biegungsfrei sein, kann aber nur unendlich kleine Ausbiegungen aufweisen. Wir können also die Frage nach der Stabilitätsgrenze so stellen, daß wir die Bedingungen suchen, bei denen in unendlicher Nachbarschaft des durch die Kräfte P gegebenen geradlinigen Zustandes ein Gleichgewichtszustand mit schwachen Aus-

biegungen besteht. Oder anders ausgedrückt: wir bestimmen aus den Gleichungen zwischen den Biegungsgrößen Q, M_a, M_b, v_a, v_b, v_a', v_b' die von Null verschiedene Lösung.

Wir denken uns nun jedem Knoten, soweit es die Bewegungsbeschränkungen zulassen, unendlich kleine Verschiebungen δx, δy erteilt. Die Zahl der unabhängigen Verrückungen ist zunächst $2k - m_1$, wenn m_1 die Zahl der Verschiebungsbeschränkungen ist. Es sind aber die Stablängen als unveränderlich angenommen und es gilt für jeden Stab $\iota\varkappa$ (vom Knoten ι zum Knoten $\varkappa$) mit dem Winkel $\alpha_{\iota\varkappa}$ zur x-Achse, eine Gleichung

$$(\delta x_\varkappa - \delta x_\iota) \cos \alpha_{\iota\varkappa} + (\delta y_\varkappa - \delta y_\iota) \sin \alpha_{\iota\varkappa} = 0.$$

Somit sind bei s Stäben nur $2k - m_1 - s$ unabhängige Verschiebungsgrößen vorhanden. Die Zahl der unabhängigen Drehungswinkel $\delta\vartheta$ ist $k - m_2$, wenn m_2 Drehungsbeschränkungen bestehen. Durch die $2k - m_1 - s$ Verschiebungsgrößen δx, δy kann man die in den Gleichungen (I) und (II) auftretenden v_a, v_b ausdrücken, z. B. für den Stab $\iota\varkappa$

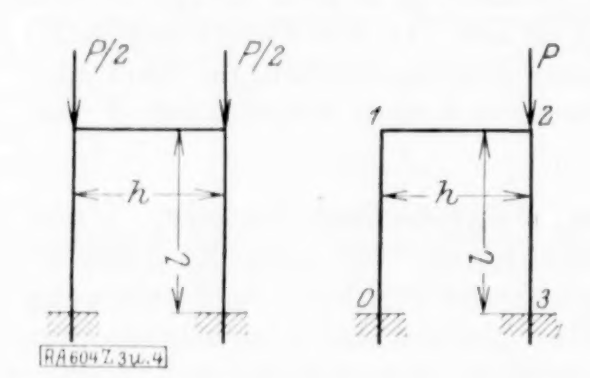


Abb. 3 und 4.

$$v_a = \delta y_\iota \cos \alpha_{\iota\varkappa} - \delta x_\iota \sin \alpha_{\iota\varkappa},$$
$$v_b = \delta y_\varkappa \cos \alpha_{\iota\varkappa} - \delta x_\varkappa \sin \alpha_{\iota\varkappa}.$$

Die v_a', v_b' der Gl. (II) sind unmittelbar gleich den betreffenden $\delta\vartheta$. In der veränderten Lage erfahren die Stäbe Zusatzkräfte und -momente, die wieder als Größen erster Ordnung angesehen werden müssen. Für jeden Stab gibt es eine axiale Zusatzkraft S (die sich zu der Stabkraft P algebraisch addiert), eine Querkraft Q, zwei Endmomente M_a, M_b. An jedem freien Knotenpunkt müssen nun Zusatzkräfte und -Momente im Gleichgewicht sein. Zwischen den $2s$ Zusatzkräften S und Q sind also $2k - m_1$ Gleichungen der Form

$$\sum_\iota S_{\iota\varkappa} \cos \alpha_{\iota\varkappa} + \sum_\iota Q_{\iota\varkappa} \sin \alpha_{\iota\varkappa} = 0, \qquad \sum_\iota S_{\iota\varkappa} \sin \alpha_{\iota\varkappa} - \sum_\iota Q_{\iota\varkappa} \cos \alpha_{\iota\varkappa} = 0$$

vorhanden. (Hier ist die Annahme enthalten, daß die äußeren Lasten, nicht aber die Auflagerkräfte bei der Formänderung nach Größe und Richtung unverändert bleiben). Die Zahl der unabhängigen Zusatzkraftgrößen ist sonach $2s - (2k - m_1)$. Ebenso wird durch die Bedingung, daß an den $k - m_2$ an der Drehung nicht behinderten Knoten die Momentensumme Null sein muß, die Zahl $2s$ der Momentgrößen M_a, M_b auf $2s - (k - m_2)$ unabhängige Biegungsmomente herabgesetzt. Eine Zusammenfassung ergibt:

$2k - s - m_1$ . . . . Verschiebungen, $\qquad k - m_2$ . . . . . Drehungen,
$2s - 2k + m_1$ . . . Zusatzkräfte, $\qquad 2s - k + m_2$ . . . Biegungsmomente

und daher als Summe $3s$ Veränderliche.

Schreibt man also für jeden der s-Stäbe die Momentengleichung (I) und die beiden Hauptgleichungen (II) an, drückt dabei die v_a, v_b durch $2k - s - m_1$ unabhängige Verschiebungsgrößen, die v'_a, v'_b durch $k - m_2$ Drehungsgrößen, die Q durch $2s - 2k + m_1$ Kraftgrößen, endlich die M_a, M_b durch $2s - k + m_2$ unabhängige Biegungsmomente aus, so hat man ein System von $3s$ linearen homogenen Gleichungen mit ebensovielen Unbekannten, dessen gleich Null gesetzte Determinante die Stabilitätsgrenze oder Knickbedingung liefert.

Es gilt hierbei die Einschränkung, daß zwar der Uebergang von stabilen zu instabilen Gleichgewichtslagen stets durch eine Nullstelle der Knickdeterminante hindurchführt, daß aber das Ueberschreiten einer Nullstelle nicht notwendig Instabilität zur Folge hat.

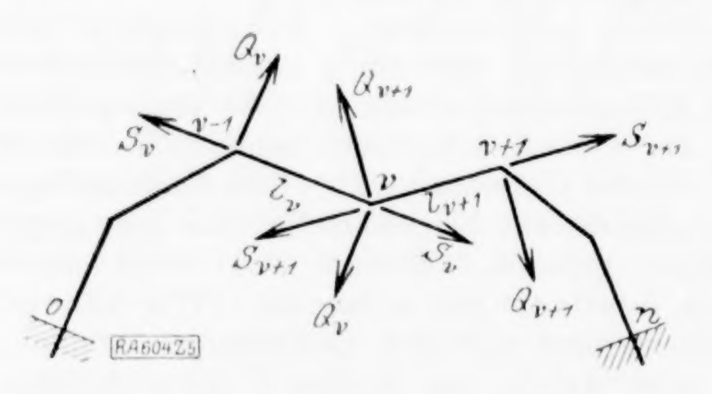


Abb. 5.

3. Ein wichtiger Sonderfall: der ebene Polygonrahmen.

Die Gleichungen und die Knickbedingung werden besonders übersichtlich, wenn das Rahmentragwerk aus einem einzigen Polygonzug besteht (Abb. 5). Wir nehmen an, dieser ist an beiden Enden eingespannt, d. h. wir betrachten einen sog. »eingespannten Stabzug.« Die Knoten bezeichnen wir von 0 bis n, die Stäbe in der-

selben Folge mit 1 bis n, die Indizes bei l_ν, E_ν, J_ν, z_ν beziehen sich auf den ν-ten Stab. Jetzt sind $s = n$, $k = n + 1$, $m_1 = 4$, $m_2 = 2$.

Das Anfangsmoment des $(\nu + 1)$-ten ist gleich dem Endmoment des ν-ten Stabes und sei M_ν; die $2s$ Momente sind hiermit durch $2s - k + m_2 = n + 1$ Momentgrößen ausgedrückt. Die Drehungswinkel der freien Knoten seien $\vartheta_1, \vartheta_2 \ldots \vartheta_n$, wobei ϑ_ν gleich ist dem v_a' für den $(\nu + 1)$-ten und dem v_b' für den ν-ten Stab; die v' sind so durch $k - m_2 = n - 1$ Drehungsgrößen dargestellt. Nun die Zusatzkräfte. Damit ein biegungsfreies Gleichgewicht besteht, also ein Knickproblem in unserem Sinn überhaupt vorliegt, müssen die Belastungen so beschaffen sein, daß der Rahmen ein zu ihnen passendes Seileck bildet. Die Kräfte Q und S haben daher in jedem Knoten die gleiche Resultierende. Es ist also Q_ν die zum ν-ten Stab senkrechte Komponente einer von ν unabhängigen Kraft $Q_\nu = -X \sin \alpha_\nu + Y \cos \alpha_\nu$, wenn α_ν der Winkel des ν-ten Stabes mit der x-Achse ist. Die s Größen Q sind so durch $2s - 2k + m_1 = 2$ Werte X, Y zu ersetzen. Die Normalverschiebungen v kommen in den Gl. (II) nur in der Verbindung $\frac{v_b - v_a}{l}$ vor und hierfür schreiben wir

$$\frac{v_b - v_a}{l_\nu} = \delta_\nu \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (6).$$

Damit sind die Größen v durch n Werte δ ausgedrückt, während jedoch nur $2k - s - m_1 = n - 2$ unabhängige δ vorhanden sind. Nun bestehen aber zwischen den δ, wenn man die Unveränderlichkeit der Stablängen voraussetzt, die beiden Beziehungen

$$\sum_{\nu=1}^{n} l_\nu \delta_\nu \cos \alpha_\nu = 0, \quad \sum_{\nu=1}^{n} l_\nu \delta_\nu \sin \alpha_\nu = 0 \quad \ldots \ldots (7)$$

die aussagen, daß die Vektorsumme der Relativverschiebungen zwischen Anfang und Ende des Stabzugs, d. i. die Verschiebung des n-ten Knotens gegenüber dem ersten, null sein muß [1]). Die noch verfügbaren Gleichungen sind also: die Momentengleichungen (I)

$$M_\nu - M_{\nu-1} + P_\nu l_\nu \delta_\nu = l_\nu (X \sin \alpha_\nu - Y \cos \alpha_\nu) \quad \ldots . (8)$$

und die Hauptgleichungen (II)

$$\vartheta_\nu - \vartheta_{\nu-1} = \left(\frac{l}{EJ}\right)_\nu (M_\nu + M_{\nu-1}) \cdot t(z), \quad 2\delta_\nu - (\vartheta_\nu + \vartheta_{\nu-1}) = \left(\frac{l}{EJ}\right)_\nu (M_\nu - M_{\nu-1}) \cdot s(z) \quad (9),$$

wobei ν die Werte 1 bis n durchläuft. Man hat somit $3n + 2$ lineare homogene Gleichungen mit $3n + 2$ Unbekannten ($n + 1$ Momente, $n - 1$ Drehwinkel, n Stabdrehwinkel, 2 Werte X, Y). Die gleich Null gesetzte Determinante dieses Systems ist die Knickbedingung. Die Aufgabe ist somit grundsätzlich gelöst.

Eine Vereinfachung läßt sich erzielen, wenn man die Zahl der Knickgleichungen vermindert. Man kann z. B. aus (7), (8) und (9) die Winkel δ eliminieren. Hierzu berechnet man aus (8) die Stabdrehwinkel δ und setzt in die zweite Gruppe der Hauptgleichungen (9) ein. Mit der Abkürzung

$$\lambda = \frac{l}{EJ} \frac{1}{z \sin z}$$

erhält man für $\nu = 1$ bis $\nu = n$ die $2n$ Beziehungen

$$\begin{aligned} \vartheta_{\nu-1} &= \lambda_\nu (M_{\nu-1} \cos z_\nu - M_\nu) + X \frac{\sin \alpha_\nu}{P_\nu} - Y \frac{\cos \alpha_\nu}{P_\nu}, \\ \vartheta_\nu &= \lambda_\nu (M_{\nu-1} - M_\nu \cos z_\nu) + X \frac{\sin \alpha_\nu}{P_\nu} - Y \frac{\cos \alpha_\nu}{P_\nu} \end{aligned} \quad \ldots (10).$$

Die Verbindung der Gl. (7) und (8) ergibt die zwei Gleichungen

$$\begin{aligned} &\sum_{\nu=1}^{n} (M_\nu - M_{\nu-1}) \frac{\sin \alpha_\nu}{P_\nu} - X \sum_{1}^{n} \frac{\sin^2 \alpha_\nu}{P_\nu} l_\nu + Y \sum_{1}^{n} \frac{\sin \alpha_\nu \cos \alpha_\nu}{P_\nu} l_\nu = 0 \\ &\sum_{\nu=1}^{n} (M_\nu - M_{\nu-1}) \frac{\cos \alpha_\nu}{P_\nu} - X \sum_{1}^{n} \frac{\sin \alpha_\nu \cos \alpha_\nu}{P_\nu} l_\nu + Y \sum_{1}^{n} \frac{\cos^2 \alpha_\nu}{P_\nu} l_\nu = 0 \end{aligned} \quad . . (11),$$

so daß jetzt $2n + 2$ Gleichungen den $2n + 2$ Unbekannten ($n + 1$ Momente, $n - 1$ Drehwinkel, 2 Werte X, Y) gegenüberstehen.

[1]) Bei F. Bleich sind dies die sog. »Winkelgleichungen«.

Wir können noch einen Schritt weiter gehen und aus den Knickgleichungen auch die Winkel ϑ entfernen. Ist $\nu < n$, so ersetzt man in der ersten Gl. (10) ν durch $\nu + 1$ und erhält damit einen Ausdruck für ϑ_ν, den man der rechten Seite der zweiten Gl. (10) gleichstellen kann. Daraus folgen für $\nu = 1$ bis $\nu = n - 1$ die $n - 1$ Gleichungen

$$M_{\nu-1} \cdot \lambda_\nu - M_\nu (\lambda_\nu \cos z_\nu + \lambda_{\nu+1} \cos z_{\nu+1}) + M_{\nu+1} \cdot \lambda_{\nu+1}$$
$$- X \left(\frac{\sin \alpha_{\nu+1}}{P_{\nu+1}} - \frac{\sin \alpha_\nu}{P_\nu}\right) + Y \left(\frac{\cos \alpha_{\nu+1}}{P_{\nu+1}} - \frac{\cos \alpha_\nu}{P_\nu}\right) = 0 \quad \ldots \ldots \quad (12).$$

Wenn man sich, der Einspannung entsprechend, am Anfang bzw. am Ende des Stabzugs einen Stab von unendlich kleiner Länge angeschlossen denkt, so gewinnt man die erste bzw. die letzte Gleichung

$$\left.\begin{array}{l} - M_0 \lambda_1 \cos z_1 + M_1 \lambda_1 - X \dfrac{\sin \alpha_1}{P_1} + Y \dfrac{\cos \alpha_1}{P_1} = 0 \\ M_{n-1} \lambda_{n-1} - M_n \lambda_n \cos z_n + X \dfrac{\sin \alpha_n}{P_n} - Y \dfrac{\cos \alpha_n}{P_n} = 0 \end{array}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (12').$$

Zu diesem Gleichungssystem treten noch die zwei Beziehungen (11); es besteht somit Uebereinstimmung zwischen Gleichungszahl und Zahl der Unbekannten ($n + 1$ Momente, 2 Größen X, Y).

Bei der Transformation der Knickgleichungen kann man schließlich auch aus je drei Gleichungen (12) die Werte X, Y berechnen und eliminieren und so eine Kette von $n - 1$ Gleichungen aufstellen, von denen jede nur $M_{\nu-2}$, $M_{\nu-1}$, M_ν, $M_{\nu+1}$, $M_{\nu+2}$ als Variable enthält. In den Gl. (11) kann X und Y z. B. mit Gl. (12') eliminiert werden. Man erhält so $n + 1$ Fünfmomentengleichungen für die $n + 1$ Momente. Die Koeffizienten der Unbekannten sind hierbei im Allgemeinen kompliziert; an einem Beispiel (**4**) soll aber auch dieses Verfahren gezeigt werden.

Ist die Längskraft eine Zugkraft, so ist für P jetzt $- P$ und in den Gl. (10) und (12) für λ der Wert $\dfrac{l}{E J z'} \dfrac{1}{\mathfrak{Sin}\, z'}$ zu setzen ($z' = z \sqrt{-1}$).

Ist in einem Stab die Längskraft gleich Null, so belassen wir für diesen Stab den Stabdrehwinkel als Unbekannte. Für diese zusätzliche Variable tritt die Gleichgewichtsbedingung (8) des Stabes ein.

Es ist wichtig zu beachten, daß bei jeder Elimination von Unbekannten, die im Grunde eine Vereinfachung der Knickdeterminante bedeutet, auch Lösungen verloren gehen können. Bilden wir mit den zuletzt erhaltenen Gleichungen die Knickbedingung, so heißt dies, daß wir die von Null verschiedenen Werte der Unbekannten M dieses Gleichungssystems suchen. Um zu erfahren, ob nicht auch von Null verschiedene Lösungen der eliminierten Variabeln X, ϑ bzw. δ bestehen, brauchen wir nur auf die vorhergehenden Gleichungen zurückzugehen. In diesen Gleichungen setzen wir die bereits ermittelten Unbekannten gleich Null und bestimmen so schrittweise Lösungen für die übrigen Variabeln. An dem Beispiel (**4**) wird dieser Weg zu erkennen sein.

Für einen geraden Stab, der von verschiedenen Längskräften ergriffen ist (oder der, was auf das gleiche hinauskommt, einen stufenweise veränderlichen Querschnitt besitzt) gelten zufolge $\alpha = 0$ die Gleichungen [1])

$$M_{\nu-1} \lambda_\nu - M_\nu (\lambda_\nu \cos z_\nu + \lambda_{\nu+1} \cos z_{\nu+1}) + M_{\nu+1} \lambda_{\nu+1} + Y \left(\frac{1}{P_{\nu+1}} - \frac{1}{P_\nu}\right) = 0$$

$$\sum_1^n (M_\nu - M_{\nu-1}) \frac{1}{P_\nu} + Y \sum_1^n \frac{l_\nu}{P_\nu} = 0.$$

Im Fall des gelenkig gelagerten Stabes von der Länge L mit konstantem Querschnitt, der durch die Kraft P belastet ist, sind $M_{\nu-1} = M_{\nu+1} = 0$, somit $Y = 0$, $\cos z = 0$ und als kritischer Wert ergibt sich die Eulersche Last $P = \pi^2 \dfrac{E J}{L^2}$.

4. Erstes Beispiel: Regelmäßiger Ring mit radialer Belastung. Wir betrachten ein regelmäßiges Polygon von n gleichen Stäben, die gleiche Winkel miteinander einschließen und dieselbe Längskraft P erhalten. Diese Längskraft kann beispielsweise von einer radialen Belastung der Knoten mit gleichen Kräften herrühren (Abb. 6).

[1]) Die vielfachen Probleme des in Felder unterteilten Stabes, siehe bei H. Zimmermann, Sitzungsberichte der Akad. d. Wissenschaften Berlin 1907, und J. Ratzersdorfer, Der Flug (Oesterr. Flugzeitschr.), 1920, H. 1 bis 4.

Um die kritischen Werte der Last P zu finden, gehen wir nach dem in **3** beschriebenen Verfahren von den Gl. (11) und (12) aus. Die Differenzengleichung (12) wird, wenn man für P den Wert $z^2 \frac{EJ}{l^2}$ einführt und $\beta = \frac{2\pi}{n}$, $\alpha_\nu = \nu\beta$ setzt

$$M_{\nu+1} - 2\cos z \cdot M_\nu + M_{\nu+1} = 2\,l\,\frac{\sin z}{z} \sin\frac{\beta}{2}\left[X\cos(\nu + {}^1/_2)\beta + Y\sin(\nu + {}^1/_2)\beta\right] \quad (\alpha).$$

Die zwei Beziehungen (11) lauten jetzt, da alle Summen wie $\sum_1^n \sin\alpha_\nu$, $\sum_1^n \cos\alpha_\nu$, $\sum_1^n \sin 2\alpha_\nu$ usw. als Projektionen von Vektoren, die ein geschlossenes Polygon bilden, gleich Null sind

$$\sum_1^n (M_\nu - M_{\nu-1})\sin\alpha_\nu = \frac{n}{2}\,l\,X, \qquad \sum_1^n (M_\nu - M_{\nu-1})\cos\alpha_\nu = -\frac{n}{2}\,l\,Y. \quad . \quad (5)$$

Multipliziert man nun die Gl. (α) mit $-2\cos\beta$, addiert zu ihr die vorhergehende (für $\nu - 1$) und die folgende (für $\nu + 1$), so wird die rechte Seite gleich Null und man erhält eine Differenzengleichung mit fünf Momenten

$$M_{\nu-2} - 2(\cos z + \cos\beta)M_{\nu-1} + 2(1 + 2\cos z \cdot \cos\beta)M_\nu - 2(\cos z + \cos\beta)M_{\nu+1} + M_{\nu+2} = 0.$$

Schreibt man, mit Rücksicht auf die Periodizität, die Lösung in der Form

$$M_\nu = A\cos m\nu\beta + B\sin m\nu\beta$$

an, wobei m eine beliebige ganze Zahl ist, so ist (aus der Fünfmomentengleichung) für Werte $m > 1$

$$z = m\beta = m\frac{2\pi}{n}, \quad \text{oder} \quad nz = 4\pi, 6\pi, 8\pi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (a)$$

Für $m = 1$ erhält man aus den Gl. (α) und (β)

$$2(\cos\beta - \cos z)M_\nu = 2\,l\,\frac{\sin z}{z}\sin\frac{\beta}{2}\left[X\cos(\nu + {}^1/_2)\beta + Y\sin(\nu + {}^1/_2)\beta\right]$$

$$-A\sin\beta + B(1 - \cos\beta) = l\,X, \quad A(1 - \cos\beta) = +B\sin = -l\,Y$$

und wenn man in der ersten Gleichung mit Hilfe der beiden anderen die Werte X, Y eliminiert, so entsteht mit

$$\cos\frac{2\pi}{n} = \frac{z\cos z - \sin z}{z - \sin z} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (b)$$

eine weitere Beziehung zwischen z und der Seitenzahl n.

Schließlich müssen wir noch prüfen, ob bei der Elimination der ϑ und δ beim Uebergang von den allgemeinen Gleichungen zu den Gl. (11) und (12) nicht Lösungen verloren wurden. Aus den Gl. (10) erkennen wir, daß es bei verschwindenden M, X, Y nur dann Lösungen für ϑ gibt, wenn $\lambda = \infty$, d. h. $\sin z = 0$ wird, also für

$$z = \pi, 2\pi, 3\pi \quad . \quad . \quad (c)$$

Ohne jede genauere Untersuchung ist ersichtlich, da es sich nur um Deformationen ohne Wendepunkt ($z = \pi$) oder mit Wendepunkt ($z = 2\pi$) handeln kann, daß bei gerader Seitenzahl alle Werte von (c) möglich sind, daß hingegen bei ungerader Seitenzahl nur die geraden Werte 2π, 4π ... bestehen bleiben. Bei unsern früheren Ansätzen haben wir aber zuerst die δ eliminiert und deshalb greifen wir auf die Gleichungen (9) zurück. Bei verschwindenden M und ϑ sind nur Lösungen für die δ vorhanden, die mit der Bedingung (c) übereinstimmen.

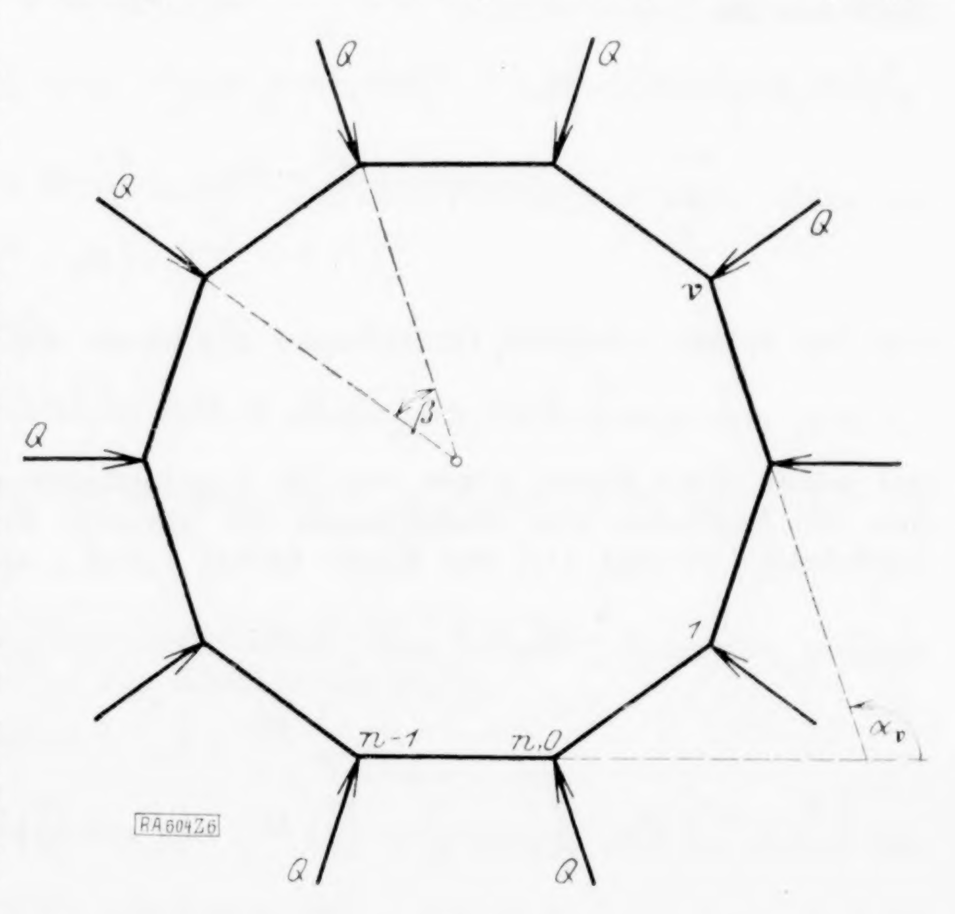


Abb. 6.

Man hat sonach das Ergebnis: Für das gleichseitige Dreieck ($n = 3$) ist der Kleinstwert von z aus Gl. (b) gleich $1{,}23\,\pi$, für das Quadrat ($n = 4$) ist [aus Gl. (a) oder Gl. (c)] $z = \pi$, für Polygone mit einer Seitenzahl $n > 4$ ist der kleinste Wert z aus Gl. (a) gleich $\frac{4\pi}{n}$. Bezeichnen wir mit L die Gesamtlänge des Polygons, $L = n\,l$, so ist also die kritische Last P bei der Seitenzahl $n = 3$

$$P = 13{,}6\,\frac{\pi^2 E J}{L^2}$$

und für regelmäßige Polygone mit $n > 3$

$$P = 16\,\pi^2 \frac{E J}{L^2}.$$

5. Zweites Beispiel: Der ebene Rechtwinkelrahmen. Von dem in der Abb. 4 gezeichneten Rechtwinkelrahmen mit eingespannten Ständerfüßen ist der rechtsseitige Stiel durch das Gewicht P belastet. Elastizitätszahl, Länge und Querschnittsträgheitsmoment sind für den linken Hilfsständer E_1, l und J_1, für den rechten Ständer E, l und J, für den Querstab E', h und J'.

Wir wollen jetzt bei Aufstellung der Knickgleichungen unmittelbar von den allgemeinen Ansätzen (7), (8) und (9) ausgehen. Die Gleichungen (7) ergeben, da $\alpha_1 = \frac{\pi}{2}$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = \frac{3\pi}{2}$, die Beziehungen

$$\delta_2 = 0, \quad \delta_1 = \delta_3\ (= \delta)$$

die auch sofort zu erkennen sind, denn die Knoten 1 und 2 können sich nur horizontal verschieben. Die Momentengleichungen (8) liefern für die beiden Stiele

$$M_1 - M_0 = l \cdot X, \qquad M_3 - M_2 + z^2 \frac{E J}{l}\,\delta = -\,l \cdot X$$

woraus man durch Addition

$$z^2 \frac{E J}{l}\,\delta = M_0 - M_1 + M_2 - M_3$$

erhält. (Für den Querstab geben wir die Gl. (8) nicht an, da hieraus nur das sonst nicht mehr auftretende Y bestimmt wird). Die sechs Hauptgleichungen (9) nehmen für die drei Stäbe mit den Abkürzungen

$$\varkappa = \frac{E' J'}{E J}\,\frac{l}{h}, \qquad \lambda = \frac{E_1 J_1}{E J}$$

die Form an

$$\frac{E J}{l}\,\vartheta_1 = \frac{1}{2\lambda}(M_0 + M_1), \qquad \frac{E J}{l}(\vartheta_2 - \vartheta_1) = \frac{1}{2\varkappa}(M_2 + M_1), \qquad \frac{E J}{l}\,\vartheta_2 = -(M_3 + M_2)\cdot t(z)$$

$$\frac{E J}{l}(2\,\delta - \vartheta_1) = \frac{1}{6\lambda}(M_0 - M_1), \qquad \frac{E J}{l}(\vartheta_2 + \vartheta_1) = \frac{1}{6\varkappa}(M_2 - M_1)$$

$$\frac{E J}{l}(2\,\delta - \vartheta_2) = (M_3 - M_2)\cdot s(z).$$

Aus den beiden mittleren Gleichungen berechnen wir ϑ_1 und ϑ_2 zu

$$\frac{E J}{l}\,\vartheta_1 = -\frac{1}{6\varkappa}(2\,M_1 + M_2), \qquad \frac{E J}{l}\,\vartheta_2 = \frac{1}{6\,\varkappa}(M_1 + 2\,M_2)$$

und setzen diese Werte, sowie den für δ gefundenen in die vier andern ein. So gewinnt man die folgenden vier Gleichungen für die vier Momente M, wobei wir jetzt für die Ausdrücke $t(z)$ und $s(z)$ der Kürze halber t und s schreiben.

$$\frac{3}{\varkappa} M_0 + \left(\frac{3}{\lambda} + \frac{2}{\varkappa}\right) M_1 + \frac{1}{\varkappa} M_2 = 0$$

$$\frac{1}{\varkappa} M_1 + \left(\frac{2}{\varkappa} + 6\,t\right) M_2 + 6\,t \cdot M_3 = 0$$

$$\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{12}{z^2}\right) M_0 - \left(\frac{1}{\lambda} + \frac{2}{\varkappa} - \frac{12}{z^2}\right) M_1 - \left(\frac{1}{\varkappa} + \frac{12}{z^2}\right) M_2 + \frac{12}{z^2} M_3 = 0$$

$$\frac{1}{\lambda} M_0 - \left(\frac{1}{\lambda} + \frac{3}{\varkappa}\right) M_1 + \left(6\,s - \frac{3}{\varkappa}\right) M_2 - 6\,s\,M_3 = 0$$

Die gleich Null gesetzte Determinante dieses Systems — eine Beziehung zwischen $\varkappa$, λ und z — ist die Knickbedingung, die zu jedem Wertepaar $\varkappa$, λ ein bestimmtes kleinstes z ergibt. Die Knicklast ist dann

$$P = z^2 \frac{EJ}{l^2}$$

Wir wollen nunmehr die vier Grenzfälle $\varkappa = 0$, $\varkappa = \infty$, $\lambda = 0$, $\lambda = \infty$ diskutieren.

$\varkappa = 0$ ist ein sehr biegungsschwacher Querstab, eine große Armlänge oder ein fast drehbares Gelenk. Die Knickbedingung lautet aufgelöst, wenn wir in den Gleichungen die Glieder, die additiv zu $\frac{1}{\varkappa}$ treten, fortlassen

$$\lambda = \frac{z^2}{3}\left(1 - \frac{2}{z^2 (t - s)}\right)$$

und nach Einsetzen von t und s

$$\lambda = \frac{z^3}{3(z - \operatorname{tg} z)}.$$

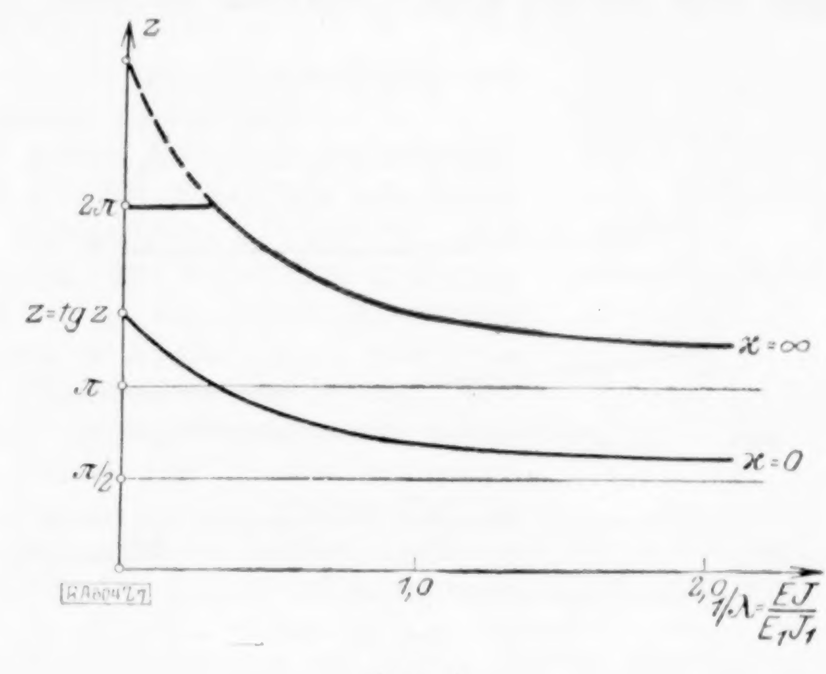


Abb. 7.

Die Abb. 7 zeigt den Verlauf der z als Funktion von $\frac{1}{\lambda}$. Für $\frac{1}{\lambda} = 0$ ist $z = \operatorname{tg} z$, die Knicklast hat jenen Wert, der dem einseitig eingespannten Stab entspricht; für $\frac{1}{\lambda} = \infty$, bei einer schwachen Einspannung des unbelasteten Hilfsständers im Querstab, ist $z = \frac{\pi}{2}$.

$\varkappa = \infty$ stellt einen sehr starken kurzen Querstab vor, dessen belastetes Ende vertikal erhalten bleibt. Die Knickbedingung wird

$$\lambda = \frac{s z^2 + 2}{12\, s}, \quad t = 0 \quad \text{oder} \quad \lambda = \frac{z^3}{24\left(\frac{z}{2} - \operatorname{tg}\frac{z}{2}\right)}, \quad \frac{1 - \cos z}{z \sin z} = 0.$$

In Abb. 7 ist $\frac{1}{\lambda}$ als Funktion von z aufgetragen. $\frac{1}{\lambda} = 0$ bedeutet einen sehr starken, $\frac{1}{\lambda} = \infty$ einen sehr schwachen Hilfsständer. Wenn $\frac{1}{\lambda}$ die Werte 0 bis ∞ durchläuft, bewegt sich z von 2π bis π.

$\lambda = 0$ ist ein sehr schwacher Hilfsständer. Die Knickbedingung wird, wenn wir die zu $\frac{1}{\lambda}$ additiven Glieder weglassen

$$\varkappa = -\frac{(s z^2 + 2) - t \cdot z^2}{6\,(s z^2 + 2) \cdot t} \quad \text{oder} \quad \varkappa = -\frac{z}{3} \operatorname{cotg} z.$$

Die Kurve der z als Funktion von $\frac{1}{\varkappa}$ ist in Abb. 8 dargestellt. Die Grenzwerte sind bereits aus den vorhergehenden Fällen zu ersehen; für $\frac{1}{\varkappa} = 0$ ist $z = \pi$, für $\frac{1}{\varkappa} = \infty$ ist $z = \frac{\pi}{2}$.

$\lambda = \infty$ bedeutet einen sehr starken Hilfsständer, das belastete Ende des rechten Ständers wird unverschieblich erhalten. Die Knickbedingung ist

$$\varkappa = \frac{t - s}{8\, s\, t} \quad \text{oder} \quad \varkappa = \frac{z^2}{4} \frac{z \cos z - \sin z}{2(1 - \cos z) - z \sin z}.$$

Abb. 8 gibt den Verlauf der z als Funktion von $\frac{1}{\varkappa}$. Die Grenzwerte sind wieder schon bei den zwei zuerst untersuchten Fällen vorhanden, für $\frac{1}{\varkappa} = 0$ ist $z = 2\pi$, für $\frac{1}{\varkappa} = \infty$ ist $z = \operatorname{tg} z$.

6. Drittes Beispiel: Der Rahmenstab (Vierendeelträger, Stockwerkrahmen). Wir betrachten einen aus gleichen Rechtecken zusammengesetzten Träger, bei dem jeder Gurt mit der Kraft $\frac{P}{2}$ belastet ist (Abb. 9). Die Gurtstäbe haben die Längen, Elastizitätszahlen, Querschnittsträgheitsmomente l, E, J, die Querstäbe h, E', J' und es sei (vgl. **5**)

$$\varkappa = \frac{E'J'}{EJ}\frac{l}{h}.$$

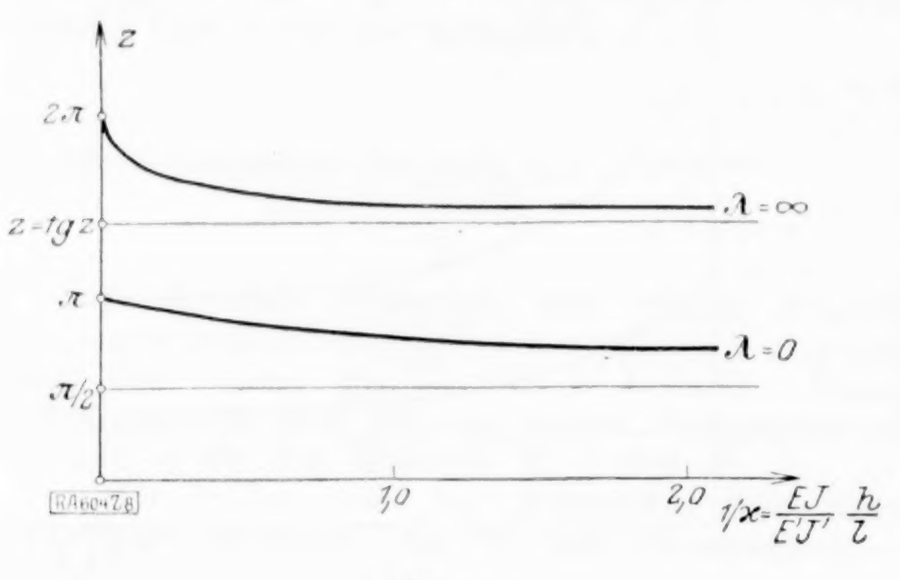


Abb. 8.

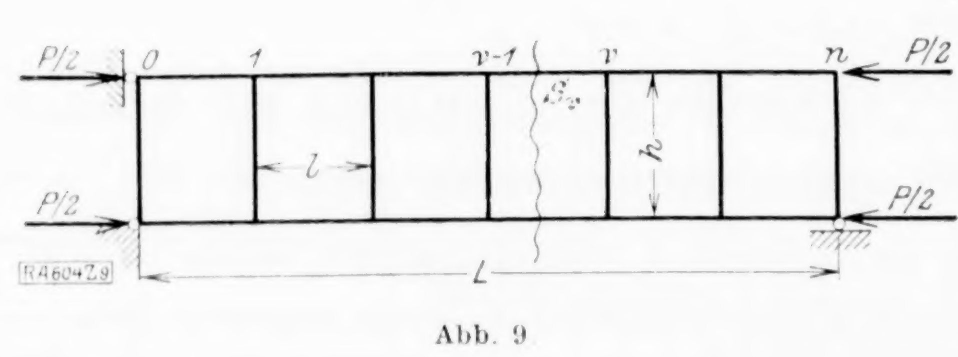


Abb. 9

Die Zahl der Felder ist n, die Knoten haben die Bezeichnung 0 bis n, die Gurtstäbe 1 bis n. Die vorgeschriebenen Auflagerbedingungen sind: Knoten 0 unten fest (zwei Bedingungen), Knoten 0 oben vertikal geführt (eine Bedingung), Knoten n unten horizontal geführt (eine Bedingung). Somit hat das Tragwerk $k = 2\,(n+1)$ Knoten, $s = 3n+1$ Stäbe, $m_1 = 4$ Auflagerbeschränkungen, $m_2 = 0$ Drehungsbeschränkungen.

Bei der Formänderung erleiden die Knoten nur eine vertikale Verschiebung und zwar die oberen und die unteren um das gleiche Maß y_ν, wobei ν von 1 bis $n-1$ läuft. Nach **2** ist die Zahl der unbekannten Verschiebungen gleich $2k - s - m_1$, also hier gleich $n-1$, was auch sofort zu ersehen ist. Die Anzahl der weiteren Variabeln (Drehungen, Zusatzkräfte, Momente) läßt sich sehr vermindern, wenn man Ober- und Untergurt gemeinsam behandelt.

Wir bezeichnen die Summe der Drehungen im oberen und unteren Knoten ν mit $2\,y_\nu'$, die Summe der Biegungsmomente im Ober- und Untergurt unmittelbar links vom Knoten mit $2\,L_\nu$, unmittelbar rechts mit $2\,R_\nu$. Wenn wir die Hauptgleichungen (II) für den ν-ten Ober- und Untergurtstab anschreiben und addieren, so treten links die Summen der Verschiebungen und Drehungen, rechts die Summen der Momente vom Ober- und Untergurtstab auf. Dabei ist für das ν-te Feld (vom Knoten $\nu-1$ bis Knoten ν) die Summe der M_a gleich $2\,R_{\nu-1}$, die Summe der M_b gleich $2\,L_\nu$. Man gewinnt so die Gleichungen

$$y_\nu' - y'_{\nu-1} = \frac{l}{EJ}\,(R_{\nu-1} + L_\nu)\,t\,(z) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(a)}$$

$$2\,\frac{y_\nu - y_{\nu-1}}{l} - (y_\nu' + y'_{\nu-1}) = \frac{l}{EJ}\,(L_\nu - R_{\nu-1})\,s(z) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(b)}$$

mit $z^2 = \frac{Pl^2}{2\,EJ}$, da die Kraft gleich $\frac{P}{2}$ gesetzt ist. Die Momentengleichung (I) für den ν-ten Obergurtstab enthält die Querkraft Q, für den ν-ten Untergurtstab demnach $-Q$, vorausgesetzt, daß keine vertikale Auflagerkraft vorhanden ist. (In diesem Fall müßte man sie als Unbekannte mitführen, was unsymmetrische Knickformen ergäbe). Wenn man nun diese beiden Gleichgewichtsbedingungen addiert, so entsteht

$$\frac{y_\nu - y_{\nu-1}}{l} = -\,\frac{l}{EJ}\,\frac{1}{z^2}\,(L_\nu - R_{\nu-1}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(c)}$$

eine Gleichung, die aus einem durch beide Gurte geführten Schnitt auch unmittelbar hergeleitet werden kann. Jetzt sind noch die Gleichungen für den Querstab aufzustellen. Für diesen ist $y_a = y_b = 0$, da die Knoten nur vertikale Verschiebungen erfahren. Da $P = 0$ gelten die Gleichungen (II'). Das Moment M_a am oberen Ende ist $L_\nu{}^0 - R_\nu{}^0$, das Moment M_b

am unteren Ende ist $-L_\nu^u + R_\nu^u$ (Abb. 10), daraus folgt $M_b - M_a = -2(L_\nu - R_\nu)$ und die zweite Gleichung (II') lautet

$$y_\nu' = \frac{1}{6\,\varkappa}\frac{l}{EJ}(R_\nu - L_\nu) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (d).$$

Die Gleichungen (a) bis (d) genügen bereits zur Beherrschung des Problems. Wir wollen dies durch Abzählen nachweisen.

Die Gleichungen (a), (b) und (c) gelten für jedes der ν Felder, also für $\nu = 1$ bis n. Die Gleichung (d) gilt für $\nu = 0$ bis n. Daher sind insgesamt $4n + 1$ Gleichungen vorhanden; L_0 und R_n muß man dabei null setzen. An Unbekannten hat man: $n - 1$ Durchbiegungen y_1 bis y_{n-1}, $n + 1$ Drehwinkel y_0' bis y_n', n Momentensummen L_1 bis L_n und n Momentensummen R_0 bis R_{n-1}, somit im Ganzen $4n$. Wie man sieht ist eine Unbekannte zu wenig, dies erklärt sich aber damit, daß die vertikale Auflagerkomponente schon gleich Null angenommen wurde. Wir haben uns so auf symmetrische Deformationen beschränkt, wobei $\Sigma y_\nu' = 0$. In diesem Fall ist die Summe aller n Gleichungen (b) und aller n Gleichungen (c) identisch, nämlich $0 = \Sigma(L_\nu - R_{\nu-1})$, von den $4n + 1$ Gleichungen sind also nur $4n$ von einander unabhängig.

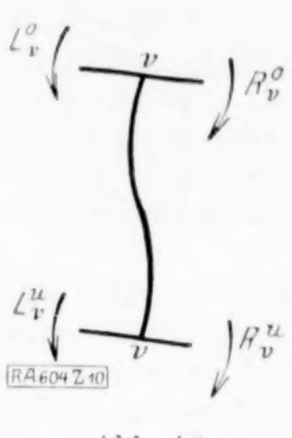


Abb. 10.

Eliminiert man aus den Gleichungen (a), (b) und (c) die y_ν (es ist dies das allgemeine Verfahren und bei allen Stäben, für die P von null verschieden ist, anwendbar, vgl. **3**), so erhält man

$$y_\nu' - y'_{\nu-1} = \frac{l}{EJ}(R_{\nu-1} + L_\nu)\cdot t(z)$$

$$-y_\nu' - y'_{\nu-1} = \frac{l}{EJ}(L_\nu - R_{\nu-1})\cdot\left(s(z) + \frac{2}{z^2}\right)$$

für $\nu = 1$ bis n. Durch Auflösen nach L_ν und $R_{\nu-1}$ findet man, unter Beachtung der Gl. (5) für $t(z)$ und $s(z)$ die Beziehungen

$$\frac{l}{EJ}L_\nu = \frac{z}{\sin z}(\cos z\cdot y_\nu' - y'_{\nu-1}), \qquad \frac{l}{EJ}R_{\nu-1} = \frac{z}{\sin z}(y_\nu' - \cos z\cdot y'_{\nu-1}).$$

Wenn $\nu < n$ kann man aus der zweiten Gleichung schließen, daß $\frac{l}{EJ}R_\nu = \frac{z}{\sin z}(y'_{\nu+1} - \cos z\cdot y_\nu')$ Damit wird

$$\frac{l}{EJ}(R_\nu - L_\nu) = \frac{z}{\sin z}(y'_{\nu+1} - 2\cos z\cdot y_\nu' + y'_{\nu-1})$$

und aus Gl. (d) entsteht

$$y'_{\nu+1} - y_\nu'\left(2\cos z + 6\,\varkappa\frac{\sin z}{z}\right) + y'_{\nu-1} = 0$$

für $\nu = 1$ bis $n - 1$, eine Kettengleichung 2. Ordnung für die y_ν'. Um die Randbedingungen zu bekommen, muß man berücksichtigen, daß $L_0 = 0$, $R_n = 0$ und so ergibt sich

$$y'_{n+1} = \cos z\cdot y_n', \qquad y'_{-1} = \cos z\cdot y_0'.$$

Mit den Hilfsgrößen y'_{-1} und y'_{n+1} kann man die Differenzengleichung auch für $\nu = 0$ und $\nu = n$ anschreiben und hat dann $n + 3$ Gleichungen für $n + 3$ Variable $y'_{-1}, y_0' \ldots y'_{n+1}$.

Diese Gleichung ist nun aufzulösen (zu integrieren). Der Ansatz $y_\nu' = e^{\nu i\vartheta}$ führt zu

$$e^{i\vartheta} + e^{-i\vartheta} - 2\left(\cos z + 3\,\varkappa\frac{\sin z}{z}\right) = 0$$

woraus

$$\cos\vartheta = \cos z + 3\,\varkappa\frac{\sin z}{z} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\alpha).$$

Das allgemeine Integral $y_\nu' = A\cos\nu\vartheta + B\sin\nu\vartheta$ schreiben wir in Hinblick auf die Symmetrie in der Form $\sin\left(\nu - \frac{n}{2}\right)\vartheta$ an. Die Randbedingungen ergeben

$$\cos z = \cos\vartheta + \operatorname{cotg}\frac{n}{2}\vartheta\cdot\sin\vartheta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\beta).$$

Eliminiert man ϑ aus den Bestimmungsgleichungen (α) und (β), so entsteht eine Gleichung für z als Funktion von $\varkappa$ und n. Für $\varkappa = 0$, d. h. bei sehr schwachen Querstäben wird

$z = \frac{\pi}{n}$, d. h. der Rahmenstab trägt nur soviel wie die beiden Gurte in unverbundenem Zustand; für $\varkappa = \infty$, d. i. bei sehr starken Querstäben ist $z = \pi$, entsprechend einer Formänderung, wie sie in Abb. 11 angedeutet ist; jeder Gurt hat in der Mitte eines jeden Feldes einen Wendepunkt, an den Enden des Feldes eine wagrechte Tangente und zeigt dabei — im ganzen gesehen — eine sinus-Form. Bei der Auflösung der Gl. (α) und (β) geht man am einfachsten derart vor, daß man bei vorgegebenem n den Parameter ϑ die Werte zwischen $\frac{\pi}{n}$ und $\frac{2\pi}{n+1}$ durchlaufen läßt, aus Gl. (β) den Wert z berechnet und hiernach aus Gl. (α) das $\varkappa$ bestimmt. Die so gefundenen Wertepaare $\varkappa$, z kann man in ein rechtwinkeliges Koordinatensystem eintragen und gewinnt damit bei gegebenem n das gesuchte z als Funktion von $\varkappa$ (Abb. 12).

Abb. 11.

Abb. 12.

Für eine große Felderzahl n und kleine $\varkappa$ wird ϑ klein, $n\,\vartheta$ nahe π und aus Gl. (α) in erster Näherung $z^2 = \left(\frac{\pi}{n}\right)^2 + 6\,\varkappa$. Führen wir die Gesamtlänge des Balkens $L = n \cdot l$ und das fiktive Trägheitsmoment $\bar{J} = 2\,J$ ein, so lautet daher der asymptotische Ausdruck für die Knicklast

$$P = \pi^2 \frac{E\,\bar{J}}{L^2} + 12\,\frac{E'\,J'}{h\,l} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13).$$

Der erste Summand ist entsprechend der Eulerformel für die unverbundenen Gurte gebildet, der zweite stellt den von der Querverbindung herrührenden Zusatz dar, der durch Verkleinern von l beliebig vergrößert werden kann. Es ist aber zu überlegen, ob bei engen Feldern der Ansatz der reinen Rahmenknickung, d. h. die Vernachlässigung der Dehnungen während des Knickvorganges, noch eine brauchbare Annäherung liefert.

Es ist nämlich sicher, daß die Gl. (13) nicht die vollständige Lösung des Problems bietet. Das Hauptglied enthält nur das Trägheitsmoment der Gurtstabquerschnittsflächen F bezüglich ihrer eigenen Schwerachse $\bar{J} = 2\,J$, während man eigentlich noch ein Glied von der Größe $2\,F\frac{h^2}{4}$ erwarten sollte, das das Trägheitsmoment bezüglich der gemeinsamen Schwerachse zum Ausdruck bringt. Schließlich muß ja bei großer Felderzahl der Rahmenbalken die Tragfähigkeit eines vollwandigen Trägers annehmen. Nun ergibt die Theorie der reinen Fachwerkknickung, die eine Berücksichtigung der Längenänderungen unter Vernachlässigung der Biegungen darstellt, beim Gitterträger das fiktive Trägheitsmoment $2\,F\frac{h^2}{4}$, während wir jetzt bei Beachten der Biegungssteifigkeit und Außerachtlassen der Dehnungen nur den andern Bestandteil $2\,J$ auffinden. Demgemäß muß man vermuten, daß eine Theorie, die sowohl die Längenänderungen, wie die Biegungssteifigkeit in Rechnung stellt, das vollständige Resultat liefern wird.

7. Allgemeine Stabwerkknickung ebener Systeme. Die Theorie der reinen Rahmenknickung bedarf nur einer kleinen Ergänzung, um zu einer allgemeinen Theorie der Stabwerkknickung zu gelangen. Wir betrachten wie vorher wieder das ebene System von k Knoten und s Stäben. Die in **2** getroffene Annahme, wonach während des Knickvorganges keine Längenänderung der Stäbe stattfindet, lassen wir fallen und setzen vielmehr voraus, daß sich der (unendlich kleinen) Biegung eine (unendlich kleine) Dehnung überlagert. Sind u_b und u_a die Verschiebungskomponenten der Endpunkte eines

Stabes in der Stabrichtung (vgl. Abb. 1), S die in die Stabrichtung fallende Komponente der Zusatzkraft, so soll die Dehnungsgleichung

$$u_b - u_a = \frac{S}{EF}\, l \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(III)}$$

als weitere »Hauptgleichung« gelten. Untersucht wird wieder die Stabilität eines biegungsfreien Gleichgewichtszustandes, wobei wir die Stabkräfte P für jeden Stab als gegeben ansehen. In den früheren Gleichungen werden die Längen unverändert, ohne Berücksichtigung der durch die S bewirkten Aenderungen eingesetzt. Es ist zu beachten, daß die Längenänderungen infolge der ursprünglichen endlichen Kräfte auch bisher nicht vernachlässigt waren; für die Längen l und die Winkel α werden ja bei der Stabilitätsberechnung die Werte des verformten Zustandes eingesetzt.

Die Bilanz zwischen Gleichungen und Unbekannten ändert sich nur in einem Punkt gegen **2**. Es treten s unbekannte Verschiebungsgrößen neu hinzu, denen stehen aber s Hauptgleichungen (III) gegenüber. Wir haben somit $4\,s$ lineare homogene Gleichungen mit $4\,s$ Variabeln, deren gleich Null gesetzte Koeffizienten Determinante die Knickbedingung liefert.

Zum Fall der reinen Rahmenknickung kommt man zurück, wenn man in (III) die Querschnittsflächen F gleich unendlich annimmt. Es sind aber noch verschiedene Erweiterungen der Theorie möglich. Ist ein Stab in einem Knoten gelenkig angeschlossen, so ist das betreffende Endmoment null, dafür aber die Neigung y' unbekannt, d. h. nicht gleich der der übrigen Stäbe in diesem Knoten. Man braucht aber nicht nur die Grenzfälle völlig nachgiebiger oder völlig steifer Eckverbindungen in Betracht zu ziehen, sondern kann auch »elastische« Anschlüsse zulassen. Eine solche Nachgiebigkeit kann durch eine lineare Beziehung zwischen den Drehungen und den Endmomenten festgelegt werden; y' und M sind dann unbekannt, dafür tritt eine neue Gleichung ein. Auch elastische Auflagerbedingungen können in gleicher Weise behandelt werden.

8. Der Rahmenstab, allgemeiner Ansatz. Wir nehmen das Beispiel des Rahmenträgers von **6** wieder auf und wollen jetzt die Längenänderungen der Stäbe berücksichtigen. Wir beschränken uns auf symmetrische Deformationen, da diese die kleinsten Knickwerte liefern.

Ein Vertikalschnitt durch den Rahmenstab (Abb. 9) lehrt, daß die Zusatzkräfte im Ober- und Untergurt desselben Faches entgegengesetzt gleich sein müssen. Somit sind es auch die Dehnungen und das bedeutet bei der angenommenen Festlegung, daß die horizontalen Verschiebungen von zwei untereinander liegenden Knoten gleich von entgegengesetztem Vorzeichen sind. Bezeichnen wir mit u_ν die Verschiebung des Obergurtknotens ν nach rechts, mit S_ν die Zugkraft im Obergurtstab $\nu-1, \nu$ so ist nach Gl. (III)

$$S_\nu = \left(u_\nu - u_{\nu-1}\right)\frac{EF}{l} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(e)}$$

für $\nu=1$ bis n. Die Gleichungen (a), (b) und (c) in **6** bleiben unverändert bestehen, nur ist jetzt y_ν die halbe Summe der oberen und unteren Verschiebung, ohne daß jedoch die Gleichheit beider behauptet werden könnte. In Gl. (d) kommt ein von den Verschiebungen u herrührendes Glied hinzu, denn diese Gleichung war die zweite der Hauptgleichungen (II') für den Querstab und enthält allgemein noch den Ausdruck $2\,\frac{y_b - y_a}{l}$. Statt y_b, y_a und l sind jetzt $-u_\nu$, u_ν und h zu schreiben. Daher wird

$$2\,\frac{u_\nu}{h} + y'_\nu = \frac{1}{6\,\varkappa}\,\frac{l}{EJ}\left(R_\nu - L_\nu\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(d')}$$

Schließlich stellen wir noch die Momentengleichung (I) für den Querstab auf. Da $2(L_\nu - R_\nu)$ die Differenz der Endmomente und $S_{\nu+1} - S_\nu$ gleich der Querkraft Q ist, lautet sie

$$2\,(L_\nu - R_\nu) + h\,(S_{\nu+1} - S_\nu) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(f)}$$

für $\nu = 1$ bis $n-1$. Mit dem System der sechs Gleichungen (a) bis (f) ist die erforderliche Anzahl zur Berechnung der 6 Variabelnreihen y, y', L, R, S, u gegeben.

Wir wollen wieder wie in **6** die y eliminieren. Die dort bestimmte Beziehung für $R_\nu - L_\nu$ war aus den Gleichungen (a), (b) und (c) abgeleitet, gilt also unverändert weiter und es entsteht mit der Gl. (d')

$$\left[y'_{\nu+1} - y'_\nu\left(2\cos z + 6\,\varkappa\,\frac{\sin z}{z}\right) + y'_{\nu-1}\right]\frac{z}{12\,\varkappa\,\sin z} = \frac{u_\nu}{h} \quad \ldots\ldots \quad \text{(d'')}$$

Wenn $\nu < n$ kann man ν in Gl. (e) durch $\nu + 1$ ersetzen, also $S_{\nu+1}$ und weiter $S_{\nu+1} - S_\nu$ berechnen. Aus Gl. (f) erhält man damit

$$2\left(L_\nu - R_\nu\right) + EF\frac{h}{l}\left(u_{\nu+1} - 2\,u_\nu + u_{\nu-1}\right) = 0$$

für $\nu = 1$ bis $n - 1$. Hier übernehmen wir den früheren Ausdruck für $L_\nu - R_\nu$, dann die Werte u aus der eben entwickelten Gl. (d''), indem wir sie auch auf $\nu + 1$ und $\nu - 1$ anwenden. Der Geltungsbereich wird dadurch auf $\nu = 2$ bis $n - 2$ eingeschränkt. Man gewinnt eine Kettengleichung 4. Ordnung für y'

$$y'_{\nu+2} + a\,y'_{\nu+1} + 2\,b\,y'_\nu + a\,y'_{\nu-1} + y'_{\nu-2} = 0 \quad \ldots\ldots \quad (K)$$

für $\nu = 2$ bis $n - 2$ wobei die Abkürzungen eingeführt wurden

$$a = -2\left(1 + \cos z + 3\,\varkappa\frac{\sin z}{z} + 3\,\lambda\right),\quad b = 1 + 2\cos z + 6\,\varkappa\frac{\sin z}{z} + 6\,\lambda\cos z,$$

$$\lambda = \varkappa\frac{J}{\frac{F\,h^2}{4}} = \frac{E'}{E}\frac{4\,J'\,l}{F\,h^3}$$

Als Randbedingungen haben wir wie vorher aus $L_0 = 0$, $R_n = 0$

$$y'_{-1} = \cos z \cdot y'_0, \qquad y'_{n+1} = \cos z \cdot y'_n \quad \ldots\ldots \quad (R_1)$$

Dies ermöglicht die Kettengleichung auch für $\nu = 1$ und $\nu = n - 1$ anzuschreiben. Man benötigt aber noch die Gleichungen für $\nu = 0$ und $\nu = n$. Für $\nu = 0$ ergibt sich aus Gl. (f): $-2\,R_0 + h\,S_1 = 0$ und daraus mit Gl. (e) : $2\,R_0 = E\,F\frac{h}{l}\,(u_1 - u_0)$. Wenn man für R_0 den in **6** gefundenen Ausdruck $\frac{l}{E\,J}\,R_0 = \frac{z}{\sin z}\,(y'_1 - \cos z \cdot y'_0)$ einführt, so entsteht

$$\left(y'_1 - \cos z \cdot y'_0\right)\frac{2\,z}{\sin z} = \frac{F\,h}{J}\left(u_1 - u_0\right)$$

Bildet man aus Gl. (d'') die Differenz $u_1 - u_0$ und setzt sie dem jetzt bestimmten Wert gleich, so erhält man mit

$$y'_2 + (a + 1)\,y'_1 + (b - \cos z)\,y'_0 = 0$$

und dann analog $\ldots\ldots \quad (R_2)$

$$y'_{n-2} + (a + 1)\,y'_{n-1} + (b - \cos z)\,y'_n = 0$$

die beiden Gleichungen für $\nu = 0$ und $\nu = n$.

Es ist bemerkenswert, daß das Problem nur von 2 Parametern abhängt, von dem bereits früher benutzten $\varkappa$, dem Verhältnis der Steifigkeiten von Quer- und Gurtstab und von λ, d. i. dem $\varkappa$-fachen Verhältnis $J : \frac{F\,h^2}{4}$. Auf die Dehnbarkeit der Querstäbe kommt es überhaupt nicht an. Die reine Rahmenknickung ist der Fall $\lambda = 0$, man sieht, daß sie bei großem $\frac{F\,h^2}{4}$ nur eine Näherung sein kann.

Zusatz. Man kann auch die Frage stellen, wie sich statt der berechneten y_ν' die Durchbiegungen y_ν verhalten. Aus der Gl. (c) folgt in Verbindung mit den Gl. (b) und (c) von **6**

$$\delta_\nu = \frac{y_\nu - y_{\nu-1}}{l} = -\frac{1}{z^2\,s\,(z) + 2}\left(y'_\nu + y'_{\nu-1}\right)$$

Es lassen sich also die δ (oder die Differenzen der y) linear homogen in y' ausdrücken, d. h. es genügen auch die δ der Kettengleichung (K). Damit wird

$$y_{\nu+2} + a\,y_{\nu+1} + 2\,b\,y_\nu + a\,y_{\nu-1} + y_{\nu-2} = \text{konst.}$$

Die Konstante verschwindet nur bei einer bestimmten Wahl des Nullpunktes der y. Legt man durch das ν-te Feld beim Knoten ν einen Schnitt, so liefert das Momentengleichgewicht $L_\nu + \frac{P}{2}\left(y_\nu - y_0\right) - h\,S_\nu = 0$. Da man S_ν nach Gl. (e) durch u_ν, $u_{\nu-1}$, diese nach Gl. (d') durch y'_ν, $y'_{\nu-1}$, R_ν, L_ν, $R_{\nu-1}$, $L_{\nu-1}$, endlich die R und L nach **6** durch die y' ausdrücken kann, so sieht man, daß $y_\nu - y_0$ ebenfalls der Differenzengleichung (K) genügt, also y_ν dann und nur dann, wenn $y_0 = 0$ gesetzt wird. Unter dieser Voraussetzung gilt also

$$y_{\nu+2} + a\,y_{\nu+1} + 2\,b\,y_\nu + a\,y_{\nu-1} + y_{\nu-3} = 0 \quad \ldots\ldots \quad (K')$$

Die Randbedingungen sind

$$y_0 = y_n = 0 \quad \ldots\ldots \quad (R'_1)$$

Faßt man weiter die zweite Gl. (R_2) in die Form

$$(y'_{n-2} + y'_{n-1}) + a\,(y'_{n-1} + y'_n) + (b - a - \cos z)\,y'_n = 0$$

und beachtet, daß nach (R_1): $y'_n = \frac{y'_n + y'_{n+1}}{1 + \cos z}$, so wird

$$\left(y'_{n-2} + y'_{n-1}\right) + a\left(y'_{n-1} + y'_n\right) + \frac{b - a - \cos z}{1 + \cos z}\left(y'_n + y'_{n+1}\right) = 0.$$

Nun ist, wie gerade gezeigt wurde, jede Summe aufeinanderfolgender y' bis auf einen konstanten Faktor gleich der Differenz der betreffenden y und man bekommt, da $y_n = 0$

$$y_{n-2} + (a - 1)\,y_{n-1} + \frac{a + \cos z - b}{1 + \cos z}\,y_{n+1} = 0$$

und dann in gleicher Weise . . . . (R'_2)

$$y_2 + (a - 1)\,y_1 + \frac{a + \cos z - b}{1 + \cos z}\,y_{-1} = 0$$

Der Rahmenbalken wurde eingehend von L. Mann[1]) behandelt. Der Ansatz (K', R'_1, R'_2) stimmt mit dem von Mann gegebenen überein, wenn man dort die Glieder wegläßt, die der Berücksichtigung der Schubspannungen bei der Biegung dienen. H. Müller-Breslau[2]) geht von ähnlichen Voraussetzungen aus, macht aber im Laufe der Rechnung verschiedene willkürliche Annahmen, so daß sein Ansatz schließlich von dem hier gegebenen verschieden ist.

9. Ergebnisse für den Rahmenstab. Diskussion der Kettengleichung (K) von **8.** Beispiel.

A. Sehr starke Querverbindungen. Wir untersuchen zunächst den auch von Müller-Breslau vorangestellten Fall, daß das Trägheitsmoment J' der Querstäbe unendlich groß sei. Dann sind

$$\varkappa = \frac{E'J'}{EJ}\,\frac{l}{h} = \infty, \qquad \lambda = \varkappa\,\frac{J}{F\frac{h^2}{4}} = \infty, \qquad \frac{\lambda}{\varkappa} = \varrho = \frac{J}{F\frac{h^2}{4}}$$

und aus der Differenzengleichung (K) entsteht jetzt

$$(y'_{\nu+1} + y'_{\nu-1})\left(\frac{\sin z}{z} + \varrho\right) - 2\,y'_\nu\left(\frac{\sin z}{z} + \varrho\cos z\right) = 0$$

eine Kettengleichung 2. Ordnung. Wenn wir sie in den Durchbiegungen anschreiben (K')

$$(y_{\nu+1} + y_{\nu-1})\left(\frac{\sin z}{z} + \varrho\right) - 2\,y_\nu\left(\frac{\sin z}{z} + \varrho\cos z\right) = 0$$

brauchen wir nurmehr die Randbedingungen $y_0 = y_n = 0$ hinzuzunehmen. Die Bedingungen R_2' haben weiter keine Bedeutung, da sie bloß y_{-1} und y_{n+1} bestimmen, diese aber in den Gleichungen nicht auftreten, wenn wir, was völlig genügt, ν von 1 bis $n - 1$ laufen lassen.

Wir haben nun diese Gleichung aufzulösen. Der (aus Symmetriegründen gewählte) Ansatz $y_\nu = \cos\left(\nu - \frac{n}{2}\right)\vartheta$ führt zu

$$\cos\vartheta\left(\frac{\sin z}{z} + \varrho\right) - \left(\frac{\sin z}{z} + \varrho\cos z\right) = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{(a)}$$

während die Randbedingung verlangt, daß $\vartheta = \frac{\pi}{n}$. Damit wird

$$\varrho = \frac{4J}{Fh^2}\,\frac{1 - \cos\frac{\pi}{n}}{\cos\frac{\pi}{n} - \cos z}\,\frac{\sin z}{z} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{(A)}.$$

mit der Knicklast

$$P = 2\,z^2\,\frac{EJ}{l^2}$$

---

[1]) L. Mann, Die Berechnung steifer Vierecknetze. Zeitschr. für Bauwesen Bd. 59 (1909), S. 539 bis 567.

[2]) H. Müller-Breslau, Die neueren Methoden der Festigkeitslehre und der Statik der Baukonstruktionen. 5. Aufl., Leipzig 1924, S. 380 u. f.

Bei großer Felderzahl sind $\vartheta = \frac{\pi}{n}$ und z kleine Werte. In erster Näherung ist aus der Gl. (a): $z^2 = \frac{\pi^2}{n^2}\frac{1+\varrho}{\varrho}$ und mit dem fiktiven Trägheitsmoment $\overline{J} = 2\left(J + \frac{Fh^2}{4}\right)$ wird bei der Gesamtlänge $L = n\,l$ des Stabes die kritische Last

$$P = \pi^2 \frac{E\overline{J}}{L^2}.$$

Der Rahmenstab wirkt also wie ein eingliedriger Stab mit dem resultierenden Trägheitsmoment beider Gurtungen. Um eine zweite Näherung zu erhalten, entwickeln wir die Gl. (a) bis zum zweiten Glied und setzen für z den ersten Näherungswert ein. So gewinnt man die Gleichungen

$$z^2 = \frac{\pi^2}{n^2}\frac{1+\varrho}{\varrho}\left(1 - \frac{\pi^2}{12\,n^2\,\varrho}\right)$$

und

$$P = \pi^2 \frac{E\overline{J}}{L^2}\left(1 - \frac{\pi^2}{12\,n^2}\frac{F\,h^2}{4\,J}\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (A').$$

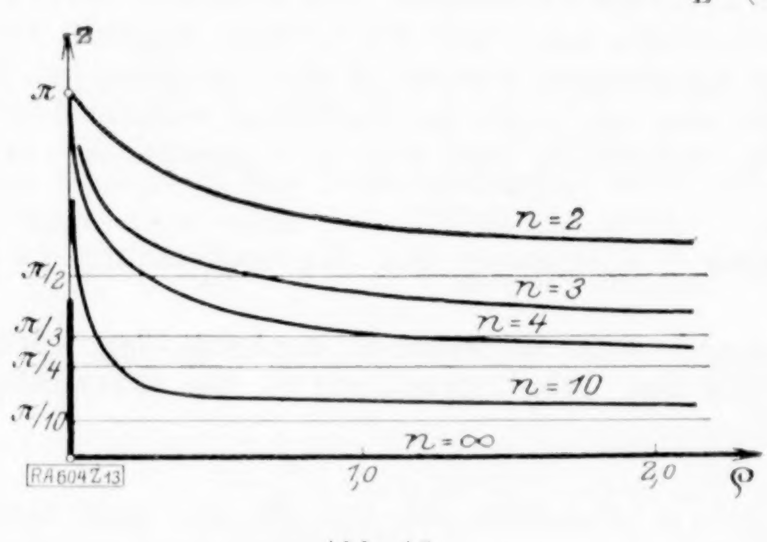


Abb. 13.

Der zweite Summand in der Klammer, der mit wachsendem n gegen Null geht, zeigt die Abminderung der Tragkraft gegenüber dem Vollwandträger in erster Näherung. Man kann für kleinere n weitere Näherungen ableiten, indem man höhere Potenzen von z und ϑ berücksichtigt oder lieber auf die vollständige Gl. (A) zurückgreifen, die ohne Mühe zeichnerisch auswertbar ist. In Abb. 13 ist für beliebige Werte n das Bild der z als Funktion von ϱ dargestellt. Für $\varrho = 0$ ist immer $z = \pi$, entsprechend der reinen Rahmenknickung bei $\varkappa = \infty$. In der bisherigen Literatur sind Formeln veröffentlicht worden, die nur bei großem n einigermaßen mit unserm Ergebnis übereinstimmen. Sowohl Mann wie Müller-Breslau geben Formeln an, die unserer (A') ähnlich sind [1]).

B. Große Felderzahl bei schwächeren Querstäben. Führt man in die Kettengleichung (K') die Differenzenquotienten

$$l^2 \cdot \Delta_2\, y = y_{\nu+1} - 2\,y_\nu + y_{\nu-1}\,, \qquad l^4 \cdot \Delta_4\, y = y_{\nu+2} - 4\,y_{\nu+1} + 6\,y_\nu - 4\,y_{\nu-1} + y_{\nu-2}$$

ein, so entsteht $\quad l^4 \cdot \Delta_4\, y + l^2\,(4+a) \cdot \Delta_2\, y + 2\,(a+b+1)\,y = 0.$

Für große Werte n und eine feste Länge $L = nl$ wird l klein und man darf, wenn λ von Null verschieden ist (da sonst $a+b+1=0$), das erste Glied weglassen und erhält damit nach Einsetzen von $\Delta_2\, y$

$$(4+a)\,(y_{\nu+1} + y_{\nu-1}) + 2\,(b-3)\,y_\nu = 0 \qquad \text{oder}$$

$$\left(1 - \cos z - 3\,\varkappa\frac{\sin z}{z} - 3\,\lambda\right)(y_{\nu+1} + y_{\nu-1}) - 2\left(1 - \cos z - 3\,\varkappa\frac{\sin z}{z} - 3\,\lambda\cos z\right)y_\nu = 0.$$

Diese Gleichung ist mit den Randbedingungen $y_0 = y_n = 0$ zu integrieren. Der Ansatz $y_\nu = \cos\left(\nu - \frac{n}{2}\right)\vartheta$ erfordert wegen der Randbedingung $\vartheta = \frac{\pi}{n}$ und zufolge $(4+a)\cos\vartheta = 3 - b$ die Gleichung

$$\cos\frac{\pi}{n} = \frac{3-b}{4+a} = \frac{1 - \cos z - 3\,\varkappa\frac{\sin z}{z} - 3\,\lambda\cos z}{1 - \cos z - 3\,\varkappa\frac{\sin z}{z} - 3\,\lambda}$$

[1]) L. Mann, a. a. O. S. 566. — Bei H. Müller-Breslau, a. a. O. S. 398 ist die Knicklast (Formel 74), $P = \pi^2\frac{EJ}{L^2}\frac{u}{1 + 0{,}8\,\frac{1+2\,\varrho}{n^2\,\varrho}\,u}$ mit $u = \left(\frac{2\,n}{\pi}\right)^2 \operatorname{tg}^2\frac{\pi}{2\,n}$. Bei großer Felderzahl n wird u nahezu gleich Eins und es heißt dann im wesentlichen

$$P = \frac{\pi^2\,E\,\overline{J}}{L^2}\left(1 - 0{,}8\,\frac{1+2\,\varrho}{n^2\,\varrho}\right) \quad \text{gegen} \quad P = \pi^2\frac{E\overline{J}}{L^2}\left(1 - \frac{0{,}82}{n^2\,\varrho}\right) \quad \text{bei uns.}$$

und daraus findet man

$$\varrho = \frac{1-\cos\frac{\pi}{n}}{\cos\frac{\pi}{n}-\cos z}\,\frac{\sin z}{z}\left(1-\frac{1-\cos z}{3\,\varkappa}\,\frac{z}{\sin z}\right).$$

Die Gleichung unterscheidet sich nur durch den zweiten Summanden in der Klammer von Gl. (A). Dieser Ausdruck ist aber bei endlichem $\varkappa$, großem n (und daher kleinem z) bis auf Größen von höherer als 2. Ordnung gleich $\frac{z^2}{6\,\varkappa}$. In erster Näherung, d. h. wenn auch z^2 gegen Eins vernachlässigt wird, bleibt also das erste Resultat von (A') bestehen, $z^2 = \frac{\pi^2}{n^2}\,\frac{1+\varrho}{\varrho}$. In zweiter Näherung kann man für den Klammerwert $1-\frac{z^2}{6\,\varkappa}$ nun $1-\frac{\pi^2}{6\,n^2\varkappa}\,\frac{1+\varrho}{\varrho}$ schreiben. Es ist also jetzt $\frac{1}{\varrho}$ in Gl. (A') durch

$$\frac{1}{\varrho}\left(1-\frac{\pi^2}{6\,n^2\varkappa}\,\frac{1+\varrho}{\varrho}\right)$$

zu ersetzen. Damit werden

$$z^2 = \frac{\pi^2}{n^2}\,\frac{1+\varrho}{\varrho}\left(1-\frac{\pi^2}{12\,n^2\varrho}-\frac{\pi^2}{6\,n^2\lambda}\right)$$

und

$$P = \pi^2\frac{EJ}{L^2}\left[1-\frac{\pi^2}{12\,n^2}\,\frac{F\,h^2}{4\,J}\left(1+2\,\frac{h}{l}\,\frac{J}{J'}\right)\right] \quad \ldots\ldots \quad \text{(B)}.$$

Der neue Zusatz gibt die Abminderung infolge der Endlichkeit der Trägheitsmomente J der Querstäbe. Das Ergebnis stimmt aber mit dem von Müller-Breslau durchaus nicht überein[1]).

C. Der allgemeine Fall. Im allgemeinen Fall handelt es sich darum, zu gegebenen Werten n, $\varkappa$ und λ das z zu finden. Dies ist wohl nicht direkt möglich, da die Gleichung in z transzendent ist, aber man kann bei vorgegebenem n die drei Variabeln z, $\varkappa$, λ als Funktionen zweier Parameter ϑ_1, ϑ_2, explizite darstellen, womit zusammengehörige Wertetripel z, $\varkappa$, λ bestimmt sind.

Führen wir in die Kettengleichung (K') von **8** $y_\nu = e^{\nu i \vartheta}$ ein, so ergibt sich

$$4\cos^2\vartheta + 2\,a\cos\vartheta + 2\,(b-1) = 0.$$

Die beiden Lösungen dieser quadratischen Gleichung, die nicht reell sein müssen, seien ϑ_1 und ϑ_2; dann sind

$$\cos\vartheta_1+\cos\vartheta_2 = -\frac{a}{2}, \qquad \cos\vartheta_1\cdot\cos\vartheta_2 = \frac{b-1}{2} \quad \ldots\ldots \quad (\alpha).$$

Die Randbedingungen gewinnt man in folgender Weise. Die allgemeine Lösung der Differenzengleichung (K') ist mit Rücksicht auf die Symmetrie

$$y_\nu = A\cos\left(\nu-\frac{n}{2}\right)\vartheta_1 + B\cos\left(\nu-\frac{n}{2}\right)\vartheta_2.$$

Daher wird mit $y_0 = y_n = 0$,

$$\frac{A}{B} = -\frac{\cos\frac{n}{2}\,\vartheta_2}{\cos\frac{n}{2}\,\vartheta_1}.$$

Die Bedingung (R_2') von **8** verlangt, daß

$$A\left[\cos\left(\frac{n}{2}-2\right)\vartheta_1+(a-1)\cos\left(\frac{n}{2}-1\right)\vartheta_1-\frac{a-b+\cos z}{1+\cos z}\cos\left(\frac{n}{2}+1\right)\vartheta_1\right]$$
$$+B\left[\cos\left(\frac{n}{2}-2\right)\vartheta_2+(a-1)\cos\left(\frac{n}{2}-1\right)\vartheta_2-\frac{a-b+\cos z}{1+\cos z}\cos\left(\frac{n}{2}+1\right)\vartheta_2\right]=0.$$

---

[1]) H. Müller-Breslau, a. a. O. S. 400, Formel (82). Zu fast der gleichen Formel gelangt jedoch M. Grüning in seinem kürzlich erschienenen Buch, Die Statik des ebenen Tragwerkes, Berlin 1925. Grüning geht von ungefähr gleichen Erwägungen aus wie Müller-Breslau, führt aber die Rechnung weit übersichtlicher durch. Es heißt dort S 695, Gl. (155):

$$P = \pi^2\frac{E\bar{J}}{L^2}\,\frac{\omega}{\varkappa}, \quad \text{mit } \varkappa = \left[1+\frac{\pi^2}{12\,n^2}\,\frac{F\,h^2}{4\,J}\left(1+2\,\frac{h}{l}\,\frac{J}{J'}\right)\omega\right],$$

wobei für große n der Wert $\omega = \frac{2\,n^2}{\pi^2}\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)$ gleich Eins zu setzen ist.

Die Gleichsetzung beider Werte für $A:B$ liefert eine Gleichung, die nach $\cos z$ aufgelöst werden kann

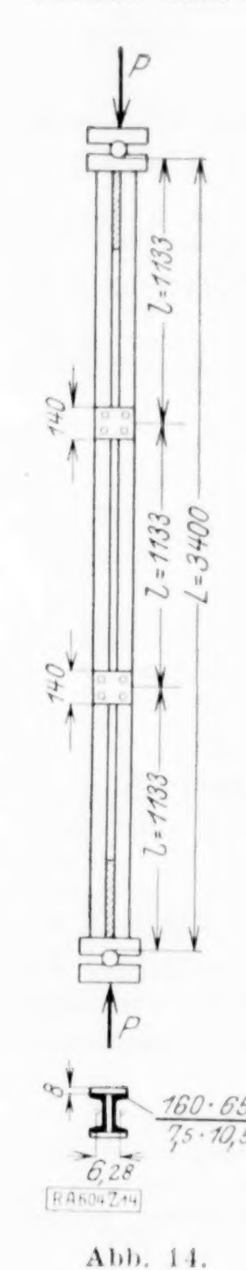


Abb. 14.

$$\cos z = -1 - \frac{(a-b-1)\left[\cos\vartheta - \operatorname{tg}\frac{n}{2}\vartheta\cdot\sin\vartheta\right]_2^1}{\left[\cos 2\vartheta + a\cos\vartheta + \operatorname{tg}\frac{n}{2}\vartheta\,(\sin 2\vartheta + (a-2)\sin\vartheta)\right]_2^1} \qquad (\beta).$$

Hierbei bedeutet in abgekürzter Schreibweise $[x]_2^1$ die Differenz $x_1 - x_2$ Schließlich hat man aus den beiden Definitionsgleichungen für a und b noch $\varkappa$ und λ zu bestimmen und erhält so

$$\varkappa = \frac{b + a\cos z + \cos 2z}{1-\cos z}\,\frac{z}{6\sin z}, \qquad \lambda = -\frac{1}{6}\,\frac{a+b+1}{1-\cos z} \quad . \; . \quad (\gamma).$$

Zu angenommenen Werten von ϑ_1 und ϑ_2 rechnet man nun a und b aus Gl. (α), hierauf z aus Gl. (β) und endlich $\varkappa$ und λ aus den Gl. (γ). Benutzt man Formeln für $\operatorname{tg}\frac{n\vartheta}{2}$, so kann man in Gl. ($\beta$) durch $\cos\vartheta_1 - \cos\vartheta_2$ kürzen und den übrig bleibenden Bruch rational durch $\cos\vartheta_1 + \cos\vartheta_2$ und $\cos\vartheta_1 \cdot \cos\vartheta_2$, also auch durch a und b ausdrücken. Es sind somit $\cos z$, nach den Gl. (γ) daher auch λ und $\varkappa\,\frac{\sin z}{z}$ rational in a und b.

D. Die Sonderfälle $n = 2$ und $n = 3$. Beispiel. Bei so kleiner Felderzahl lohnt es nicht, sich auf die Integrationsverfahren zu stützen und es ist einfacher, unmittelbar von den allgemeinen Ansätzen in **8** auszugehen.

Für $n = 2$ wird aus der Gl. (K) mit $r = 1$ unter Berücksichtigung von (R_1)

$$(a + \cos z)(y_0' + y_2') + 2\,b\,y_1' = 0$$

eine Beziehung, die bei symmetrischem Ausknicken immer erfüllt ist, da $y_1' = 0$, $y_2' = -y_0'$. Es bleibt nur noch die Gl. (R_2)

$$y_2' + (a+1)\,y_1' + (b - \cos z)\,y_0' = 0$$

übrig, die mit $y_1' = 0$, $y_2' = -y_0'$ die Knickbedingung $b - 1 - \cos z = 0$ ergibt. Nach Einführung des Wertes für b wird daraus

$$\frac{\operatorname{tg} z}{z} = -\frac{1}{6}\,\frac{h}{l}\,\frac{E\,J}{E'\,J'} - \frac{4\,J}{F\,h^2}.$$

Bei $n = 3$ entsteht aus den Gl. (K) und (R_1) für $r = 1$, unter Beachtung, daß infolge der Symmetrie $y_2' = -y_1'$, $y_3' = -y_0'$ die Beziehung

$$(a - 1 + \cos z)\,y_0' + (2\,b - a)\,y_1' = 0.$$

Aus der Randbedingung (R_2) folgt

$$(b - \cos z)\,y_0' + a\,y_1' = 0.$$

Somit ist die Knickbedingung

$$a\,(a - 1 + \cos z) - (2\,b - a)(b - \cos z) = 0$$

eine Gleichung zwischen $\varkappa$, λ und z. Man erhält selbstverständlich dieselbe Beziehung aus den Gl. (K') und (R_2').

Beispiel. Anläßlich des Einsturzes der Rahmenstäbe vom Hamburger Großen Gasbehälter im Jahre 1909 wurden im Materialprüfungsamt Berlin-Lichterfelde drei diesen nachgebildete Stäbe auf Knickfestigkeit geprüft (Abb. 14) [1]). Hierbei waren: Länge $L = 340$ cm, Felderzahl $n = 3$ ($l = 113,3$ cm), Querschnittsfläche eines Gurtstabes $F = 24$ cm², Trägheitsmoment des Gurtstabes bezüglich der eigenen Schwerachse $J = 85,3$ cm⁴, Bindeblech (Querstab) Höhe $h = 6,28$ cm, Breite $b = 14$ cm, Stärke $d = 0,8$ cm, Elastizitätszahlen der

[1]) Vgl. H. Müller-Breslau, a. a. O. S. 409. Siehe auch H. Müller-Breslau: Zur Berechnung der Knicklast des Rahmenstabes. Diese Zeitschr. 1924, S. 487 bis 490. Für den im Eisenbau verwendeten Rahmenstab, der aus zwei Gurtstäben mit Bindeblechen besteht, liefern die Formeln von Müller-Breslau ein für praktische Zwecke dem hier berechneten als gleich anzusehendes Ergebnis. Die dort getroffenen Annahmen und Vernachlässigungen sind gerade diesem besondern Fall angepaßt.

drei Versuchsstäbe $E = 2010,\ 2027,\ 2045\ \mathrm{t/cm^2}$. Als Knicklasten wurden experimentell bestimmt: 81^t, $83{,}5^t$, $89{,}4^t$.

Wir wollen nun diesen Stab nach allen den vorstehenden Methoden untersuchen. Es sind

$$\bar{J} = 2\,J + F\frac{h^2}{2} = 643{,}86\ \mathrm{cm^4}\,, \qquad J' = 2\cdot\frac{1}{12}\,d\,b^3 = 365{,}87\ \mathrm{cm^4}$$

$$\varkappa = \frac{J'}{J}\,\frac{l}{h} = 77{,}3834\,, \qquad \frac{1}{\varrho} = \frac{F\,h^2}{4\,J} = 2{,}7741\,, \qquad \lambda = \varkappa\,\frac{4\,J}{F\,h^2} = 27{,}8950.$$

Aus Gl. (A) (starre Bindebleche) wird für $n = 3$ der Parameter $z = 1{,}8148$ und bei den oben angegebenen Werten von E sind die kritischen Werte $P = 88{,}0^t$, $88{,}73^t$, $89{,}51^t$.

Aus Gl. (A') (starre Bindebleche bei großer Felderzahl) folgen $P = 82{,}48^t$, $83{,}18^t$, $83{,}92^t$.

Aus Gl. (B) (schwache Bindebleche und große Felderzahl) werden $P = 81{,}75^t$, $82{,}45^t$, $83{,}19^t$.

Das genaue Verfahren liefert für $n = 3$ aus der Gleichung $a\,(a - 1 + \cos z) - (2\,b - a)\,(b - \cos z) = 0$ mit

$$-a = 169{,}37 + 2\cos z + 464{,}3004\,\frac{\sin z}{z}\,, \qquad b = 1 + 169{,}37\cos z + 464{,}3004\,\frac{\sin z}{z}$$

für z den Wert $1{,}813$, daher für die Knicklasten $P = 87{,}81^t$, $88{,}57^t$, $89{,}33^t$.

Alle diese Zahlen stimmen mit dem Versuch gut überein. Man sieht, daß man bei den üblichen Druckstäben schon bei kleiner Felderzahl nach den einfachen Formeln unter A und B rechnen kann. 604

Der Spannungszustand an der Fließgrenze (Plastizitätsbedingung).

Von **F. SCHLEICHER** in Karlsruhe[1]).

Die für die Plastizitätstheorie grundlegende Frage, welche Umstände die Fließgefahr bzw. das Erreichen der Elastizitätsgrenze bedingen, kann heute noch nicht in völlig eindeutiger Weise beantwortet werden, trotz der großen Zahl von Versuchen, die bereits zu ihrer Klärung gemacht wurden.

Nach einer alten Anschauung ist ein hydrostatischer Druck, der einem bestimmten Spannungszustande überlagert wird, ohne Einfluß auf die Bruchgefahr, so daß ein homogener Körper durch einen allseitigen gleichmäßigen Druck nicht zerstört werden kann. Hinsichtlich der Elastizitäts- oder auch der Fließgrenze dürfte ähnliches kaum gelten, da es als feststehend betrachtet werden muß, daß ein entsprechend hoher, allseitig gleichmäßiger Druck wohl einen homogenen Körper nicht zerstören kann, jedoch bleibende Formänderungen erzeugt (Materialverdichtung), die i. A. eine Aenderung der Festigkeitseigenschaften zur Folge haben werden. Welche Wirkungen ein allseitiger Druck auch bei spröden Stoffen wie Marmor, Sandstein u. ä. hervorbringen kann, zeigen die Versuche von v. Kármán und Böker.

Eine kritische Untersuchung der bisher bekannten Hypothesen über die Fließgefahr zeigt, daß diese zum größeren Teile in Widerspruch mit den wirklichen Verhältnissen stehen und z. T. noch nicht genügend mit diesen übereinstimmen. Die vorliegende Arbeit gibt eine neue Hypothese[2]), die mit den bis heute vorliegenden Versuchsergebnissen — vor allem mit denen von v. Kármán, Böker und Lode — besser über-

[1]) Der größere Teil der Ergebnisse der vorliegenden Arbeit wurde vom Verfasser bereits am 8. Mai 1925 in seiner Probevorlesung (an der Technischen Hochschule Karlsruhe) über das Thema »Spannungszustand, Fließgrenze und Bruchgefahr« mitgeteilt. Vergl. auch den Vortragsauszug von der Danziger Tagung, diese Zeitschr. Bd. 5 (1925), S. 478

[2]) Anmerkung des Herausgebers: Eine mit der hier entwickelten wesentlich gleichlautende Plastizitätsbedingung ist von mir in einem Vortrage im Ausschuß für technische Mechanik des Berliner Bezirksvereines deutscher Ingenieure am 17. Juli 1925 mitgeteilt worden. Ich habe dabei namentlich gezeigt, wie die neue Hypothese, die eine konsequente Erweiterung der von mir im Jahre 1913 eingeführten darstellt, durch die neuen Versuche von Lode notwendig gemacht und durch sie voll bestätigt wird. Die Bezeichnung »Energiekriterium« lehne ich ab, da der in Frage kommende Ausdruck für den plastischen Körper kein Maß der Energie bildet. R. v. Mises.

einstimmt als die Mohrsche Schubspannungshypothese, welch letztere in ihrer jetzigen Form nicht mehr zu halten ist, da sie den tatsächlich vorhandenen Einfluß der mittleren Hauptspannung nicht erfaßt. Auch die in einigen neueren Arbeiten über plastische Deformation zugrunde gelegte Hubersche Bedingung ist mit den Versuchsergebnissen in Widerspruch. Die vorgeschlagene neue Fassung einer Hypothese der »Energiegrenze der Elastizität«[3]) vermeidet diese Widersprüche und dürfte dabei für die mathematische Behandlung von Plastizitätsaufgaben im wesentlichen gleich gut geeignet sein, wie die von Huber.

1. Beurteilung der Beanspruchung. Die Frage nach der Sicherheit eines Bauwerkes gegen Ueberschreiten der Fließgrenze — oder gegen das Eintreten von bleibenden Formänderungen[4]) — kann auch bei vollständig bekanntem Spannungszustand bzw. Verzerrungszustand nicht beantwortet werden, ohne daß man eine Hypothese benutzt, die einen Vergleichsmaßstab für die Beanspruchung liefert. Die Baustoffeigenschaften, besonders hinsichtlich der Festigkeit, sind dabei immer als bekannt vorausgesetzt.

Das Folgende bezieht sich vorwiegend auf solche homogene Stoffe, für die das Hookesche Gesetz bis zur Elastizitätsgrenze gilt, und auf Verzerrungszustände, die unterhalb der Elastizitätsgrenze bleiben. Lokale Verfestigung des Baustoffes infolge einer früheren Ueberschreitung der Elastizitätsgrenze ist also ausgeschlossen.

Der erste uns bekannte Versuch, die Bruchlast eines Balkens auf rechnerischem Wege vorauszubestimmen, ist wohl von Galilei[5]) gemacht worden. Mit dem Galileischen Problem, das allerdings den Balken noch als starr betrachtet, beginnt die Entwicklung der Festigkeitslehre und der Elastizitätstheorie. Bei Galilei findet man auch bereits den Balken gleicher Festigkeit.

Die wichtigsten der seit Galilei verwendeten Hypothesen über die Bedingungen, unter denen für einen mit bestimmten Kräften belasteten Körper Fließen oder Bruch eintritt, sind im folgenden kurz besprochen, wobei eng verwandte Hypothesen zusammengefaßt wurden. Zum Schlusse soll etwas näher auf die Hypothesen der Energiegrenze der Elastizität eingegangen werden, die im Zusammenhange mit der Plastizitätstheorie neuerdings größere Beachtung gefunden haben[6]).

Der einfachste Fall eines Spannungszustandes ist der, daß von den drei Hauptspannungen zwei verschwinden. Diesen sogenannten einachsigen Spannungszustand kann man unter gewissen Voraussetzungen genügend genau z. B. beim einfachen Zugversuche mit einem prismatischen Stabe verwirklichen. Mit Hilfe dieses einfachen Versuches werden oft die Elastizitätskonstanten bestimmt und vor allem auch die Werte für Fließgrenzspannung und Zerreißfestigkeit, welche letztere Größen bekanntlich als Vergleichsspannungen benutzt werden, wenn ein verwickelter, dreiachsiger Spannungszustand hinsichtlich Fließgefahr oder Bruchgefahr[7]) zu beurteilen ist.

Bei einem einachsigen Spannungszustande ist also eine Beurteilung der Fließgefahr auf die einfachste Weise möglich, da man die berechnete Spannung ohne weiteres

[3]) Man vergl. K. v. Sanden, Die Energiegrenze der Elastizität nach Huber und Haigh im Vergleich zu den älteren Dehnungs- und Schubspannungstheorien. Zeitschr. Werft- und Reederei, 1921, Heft 8.

[4]) Bleibende Formänderungen brauchen durchaus nicht immer auch schädliche Formänderungen zu sein. So z. B. die Materialverdichtung bei allseitig gleichem Druck, die ja an der betreffenden Stelle eher einen günstigen Einfluß zeigt.

[5]) Galileo Galilei, Discorsi e dimostrazione matematiche. Leiden 1638.

[6]) Die in vorliegender Arbeit angeführten Hypothesen lassen sich nach K. v. Sanden in drei Gruppen ordnen:

a) Hypothesen der Spannungsgrenzen: Hauptnormalspannungshypothese (Nr. 2), Hauptschubspannungshypothese (Nr. 4).

b) Hypothesen der Verzerrungsgrenzen: Hauptdehnungshypothese (Nr. 3), Hauptschiebungshypothese (Sandel, Nr. 5).

c) Hypothesen der Energiegrenzen: Beltramische Hypothese (Nr. 6), Hubersche Hypothese (Nr. 8), Neue Hypothese (Nr. 9).

[7]) In neuerer Zeit benutzt man häufig (vor allem bei bildsamen Stoffen) nicht mehr die Bruchfestigkeit, sondern die Fließgrenzspannung zur Berechnung des »Sicherheitskoeffizienten«, so daß man von einer n-fachen Sicherheit gegen Ueberschreiten der Fließgrenze sprechen kann.

n = Fließgrenzspannung : Vergleichsspannung.

mit den im Zug- bzw. Druckversuch festgestellten Werten der Elastizitätsgrenze bzw. der Fließgrenzspannung vergleichen kann.

Wie liegen nun die Verhältnisse beim dreiachsigen Spannungszustande und welche Größen sind da für die Beurteilung der Höhe der Beanspruchung maßgebend?

2. Normalspannungshypothese. Nach der ältesten Hypothese bestehen für jeden Baustoff kennzeichnende Werte für die Zugfestigkeit bzw. die Druckfestigkeit, sowie entsprechende Größen für die Fließgrenze.

Ob an einer bestimmten Stelle des Körpers bei gegebenem Spannungszustande die Fließgrenze (bzw. Bruchgrenze) erreicht wird oder nicht, hängt nach der Normalspannungshypothese nur von der größten bzw. kleinsten der drei Hauptspannungen ab. Die Höhe der beiden anderen Hauptspannungen ist nach dieser Hypothese ohne jeden Einfluß. Diese Hypothese, welche die größte auftretende Normalspannung bzw. den größten Betrag $_{\max}|\sigma|$ des Spannungsvektors zum Maße der Beanspruchung macht, findet man schon bei Galilei und Leibniz, später bei Navier[8]), Lamé und Clapeyron. In Deutschland wurde sie besonders durch das Lehrbuch von Clebsch und in England durch Rankine eingeführt.

Diese Hypothese, die auch noch heute — besonders im englisch sprechenden Ausland — häufig in der Form zur Spannungsbeurteilung verwendet wird, daß für die zulässigen Zug- und Druckspannungen verschiedene Werte angenommen werden, steht mit der Erfahrung in Widerspruch, wie die Versuche von Voigt, Guest, v. Kármán u. a. mit Bestimmtheit zeigen.

3. Hauptdehnungshypothese. Eine zweite Hypothese benutzt als Maßstab der Fließ- und Bruchgefahr die größte auftretende Dehnung.

Der Vorschlag, die als zulässig betrachtete Last eines Bauwerks nach der größten Dehnung zu bemessen, wurde zuerst von Mariotte (1682) gemacht, dann von Navier[8]) wieder aufgenommen und durch Barré de St. Venant (1837) und Poncelet (1839) in die Festigkeitslehre eingeführt. In Deutschland wurde die Dehnungshypothese besonders durch Grashof verfochten, der für positive und negative Dehnungen verschiedene Grenzwerte annahm.

Diese Hypothese wird heute von den deutschen und französischen Ingenieuren noch am meisten benutzt. Alle die bekannten Formeln über die »Ersatzspannung«, »ideelle Spannung« oder die »reduzierte Spannung« bei zusammengesetzter Beanspruchung sind auf der Dehnungshypothese aufgebaut. Nach dieser ist ein Einfluß der beiden kleineren Hauptdehnungen nicht vorhanden, doch haben die Versuche von Voigt, Guest, v. Kàrmán u. a. gezeigt, daß diese Annahme ebenfalls mit der Erfahrung in Widerspruch steht.

4. Hauptschubspannungshypothesen. Der erstgenannten Hypothese verwandt ist die von Coulomb, welche die Schubspannungen $_{\max}|\tau|$ begrenzt, ähnlich wie es jene mit den Normalspannungen getan hat. Coulomb benutzte diese Hypothese (1776) dazu, Bruchlast und Bruchfläche einer durch Längsdruck beanspruchten Säule zu bestimmen, indem er das Minimum des Materialwiderstandes gegen Gleiten suchte.

Die Coulombsche Schubspannungshypothese wurde von Tresca, Darwin, Duguet, Mesnager, Guest u. a. weiter ausgebaut. Interessant ist es, daß gerade auch Barré de St. Venant in seiner Theorie vollkommen plastischer Medien, angeregt durch die Trescaschen Versuche, die Schubspannungshypothese als Plastizitätsbedingung benutzt hat.

Die allgemeinste Form der Schubspannungshypothese stammt von Mohr (1882), der annimmt, daß die größte Schubspannung für die Fließ- bzw. Bruchgefahr maßgebend ist, wobei aber die Höhe der zulässigen Schubspannung noch von der auf die Gleitfläche wirkenden Normalspannung abhängt. Dagegen ist nach Mohr die Höhe der mittleren Hauptspannung ohne Einfluß. Die Mohrsche Hypothese läßt die Form der »Umhüllungskurven« der Spannungskreise offen, so daß man sie ziemlich weitgehend den Versuchsergebnissen anpassen kann. Sie gibt deswegen auch sehr viele

---

[8]) Man vergl. z. B. Navier, De la résistance des corps solides (1826), 3. éd. par Barré de St. Venant (1864). Historique Nr. XLIV. p. CXCIX u. f. In dem Buche Naviers findet man jedoch neben der Normalspannungshypothese an einigen wenigen Stellen auch noch die Dehnungs- und Schubspannungshypothese, so daß bei Navier keine völlige Einheitlichkeit vorhanden ist.

Versuchsergebnisse sehr gut wieder[9]). Es sind jedoch Versuche bekannt, mit denen die Mohrsche Hypothese scheinbar nicht in Uebereinstimmung zu bringen ist. Insbesondere ist ein ziemlich bedeutender Einfluß der Höhe der mittleren Hauptspannung vorhanden, was nach der Mohrschen Hypothese nicht der Fall ist[10]).

5. Sandelsche Hypothese. Eine neue Gleitungs- (bzw. Schubspannungs) hypothese wurde von Sandel[11]) vorgeschlagen:

»Die größte im elastischen Bereiche mögliche Gleitung nimmt mit der gleichzeitig stattfindenden positiven Volumänderung linear ab.«

D. h. es wird ebenso wie bei der Mohrschen Hypothese die größte Gleitung als Maßstab betrachtet, die Größe der Grenzschiebung jedoch nicht zur Normalspannung, sondern zur Volumdehnung $e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$ in Beziehung gesetzt. Diese Hypothese bedeutet die Einräumung eines Einflusses der mittleren Hauptspannung auf die Erreichung der Elastizitätsgrenze.

6. Beltramische Hypothese der Energiegrenze der Elastizität. Von dem italienischen Mathematiker Beltrami[12]) wurde 1885 zuerst der Vorschlag gemacht, als Maß der Beanspruchung eines Volumelements den auf die Volumeinheit bezogenen Grenzwert der in dem Baustoffe aufgespeicherten Formänderungsarbeit zu benutzen.

Diese Hypothese hat den besonderen Vorzug, daß zunächst aus sämtlichen auftretenden statischen bzw. kinematischen Größen ein einziger Skalar berechnet wird und ihre Anwendung trotzdem besonders einfach ist. Denn bei allen vier früher angeführten Hypothesen muß für jeden Punkt erst die Schnittrichtung festgestellt werden, für welche das $_{\max}|\sigma|$, $_{\max}|\varepsilon|$, $_{\max}|\tau|$ bzw. $_{\max}|\gamma|$ jeweils erreicht wird, wozu bei allgemeinen Spannungszuständen immer erst verwickelte Rechnungen durchzuführen sind. Diese Arbeit fällt bei Anwendung einer energetischen Hypothese vollkommen weg, da die Formänderungsarbeit für jedes Volumelement eine skalare Ortsfunktion ist, die man sofort berechnen kann, sobald der Spannungs- oder der Verzerrungszustand bekannt ist. Bezeichnet E den Elastizitätsmodul, G den Schubmodul, m die Poissonsche Konstante (Querzahl), σ_x, σ_y, σ_z, τ_{yz}, τ_{zx}, τ_{xy} die auf ein beliebiges rechtwinkliges Achsenkreuz x, y, z bezogenen Normal- und Schubspannungen, ε_x, ε_y, ε_z, γ_{yz}, γ_{zx}, γ_{xy} die entsprechenden Dehnungen und Schiebungen, so ist die Formänderungsarbeit pro Raumeinheit A (in kgcm/cm³) durch jede der beiden Gleichungen gegeben

$$A = \frac{1}{2\,E}\left\{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2\right\} - \frac{1}{m\,E}\left\{\sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x + \sigma_x\sigma_z\right\} + \frac{1}{2\,G}\left\{\tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2 + \tau_{xy}^2\right\} \quad (1),$$

$$A = G\left\{\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2 + \frac{(\varepsilon_x + \varepsilon_x + \varepsilon_z)^2}{m-2} + \frac{\gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2 + \gamma_{xy}^2}{2}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Die Behauptung, ein Volumelement sei umsomehr angestrengt je mehr Arbeit verwendet wurde, um es zu verzerren, kann als sehr naheliegend bezeichnet werden. Man denke nur daran, daß für Federn schon seit langem die in der Raumeinheit aufgespeicherte Formänderungsarbeit zum Vergleiche herangezogen wird. Die Formänderungsarbeit hat nach Girtler[13]) eine Reihe von Eigenschaften, die sie als Vergleichsmaßstab für die Beanspruchungen besonders geeignet machen.

Sie enthält die Elastizitätskonstanten E, G, m (das sind die Größen, die das elastische Verhalten des Baustoffs kennzeichnen) explizit. Sie ist eine Größe, deren

---

[9]) Man vergl. Mohr, Abhandlungen auf dem Gebiete der technischen Mechanik. 2. Aufl Berlin 1914. Abh. V: Welche Umstände bedingen die Elastizitätsgrenzen und den Bruch eines Materials?

Roth, Die Festigkeitstheorien und die von ihnen abhängigen Formeln des Maschinenbaus. Dissertation Charlottenburg 1902, sowie Z. f Math u Physik 1902. Bd. 48.

v. Kármán, Festigkeitsversuche unter allseitigem Druck. Forschungsheft 118. Berlin 1912.

Zahlreiche weitere Literaturangaben findet man in den beiden Encyklopädie-Artikeln von v. Kármán IV, 27 und IV, 31.

[10]) R. Böker, Die Mechanik der bleibenden Formänderung in kristallinisch aufgebauten Körpern. Forschungsarbeiten Heft 175/176. Berlin 1915

W. Lode, Versuche über den Einfluß der mittleren Hauptspannung auf die Fließgrenze. Z. für angew. Math. u. Mech. Bd. 5. 1925. Man vergleiche auch Abb. 3 der vorliegenden Arbeit.

[11]) Sandel, Ueber die Festigkeitsbedingungen. Dissertation, T. H. Stuttgart 1919.

[12]) Beltrami, Sulle conditione di resistenza dei corpi elastici. Opere matematiche, IV. t. 1920. Abh. LXXXI vom Jahre 1885.

[13]) Girtler, Ueber das Potential der Spannungskräfte in elastischen Körpern als Maß der Bruchgefahr. Sitzungsberichte der Wiener Akad. 1907. CXVI. Band, Abt IIa, S. 509—555.

Endwert von dem Wege, auf welchem er erreicht wurde, ganz unabhängig ist. Ferner kann man durch entsprechende Zusatzglieder die schon vor Aufbringung der Belastung vorhandenen Materialspannungen, sowie auch die Abweichungen vom Hookeschen Gesetz berücksichtigen. Auch ist eine Erweiterung auf nicht isotrope Stoffe ohne größere Schwierigkeiten möglich. Auf die Frage, wie sich die Erweiterung der Hypothese auf kristalline Stoffe durchführen läßt, kann jedoch hier nicht eingegangen werden.

Vor den früher genannten Hypothesen zeichnet sie ferner der folgende Umstand aus: Die bezogene Formänderungsarbeit ist eine quadratische Funktion der sämtlichen Spannungen $\sigma_x \ldots \tau_{yz} \ldots$ oder in der zweiten Form der sämtlichen Dehnungen und Schiebungen $\varepsilon_x \ldots \gamma_{yz} \ldots$, so daß alle diejenigen Größen einen Beitrag zur Formänderungsarbeit liefern, die nötig sind, um den Spannungs- bzw. den Verzerrungszustand vollständig zu beschreiben. Demgegenüber benutzen die beiden ersten Hypothesen nur je eine Größe, nämlich $_{\max}|\sigma|$ bzw. $_{\max}|\varepsilon|$, die Mohrsche Hypothese $_{\max}|\tau|$ und $\sigma_{Gl.\,Fl.}$, und die Sandelsche Hypothese $_{\max}|\gamma|$ und e, d. h. also nur je zwei Größen.

Wie aus der in der Raumeinheit aufgespeicherten Formänderungsarbeit jener Spannungswert erhalten wird, der mit den im Zug- bzw. Druckversuch festgestellten Fließgrenzspannungen zu vergleichen ist, sei im folgenden der Vollständigkeit halber wiedergegeben[14]).

7. Die Vergleichsspannung σ_e. Ist σ die Normalspannung beim einfachen Zugversuch mit einem prismatischen Stabe, so ist die entsprechende Längsdehnung $\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$ und die in der Raumeinheit aufgespeicherte Formänderungsarbeit $A = \frac{\sigma\varepsilon}{2} = \frac{\sigma^2}{2E}$, d. h. es gilt $\sigma^2 = 2EA$. Hat man also für einen beliebigen Spannungszustand A nach Gl. (1) oder (2) bestimmt, so erhält man aus

$$\sigma_e = \sqrt{2EA} \qquad (3)$$

jenen Wert der Vergleichsspannung σ_e, für den die bezogene Formänderungsarbeit beim gewöhnlichen Zugversuch die gleiche ist, wie für den zu beurteilenden allgemeinen Spannungszustand. Diese Vergleichsspannung σ_e muß nach der Beltramischen Hypothese an jeder Stelle des Bauwerks kleiner sein als die Fließgrenzspannung σ_F beim Zugversuch, wenn bleibende Formänderungen ausgeschlossen sein sollen.

Das Speichervermögen an Formänderungsarbeit bis zur Fließgrenze ist für einen Flußstahl von $\sigma_F = 3000$ kg/cm² und $E = 2.2 \cdot 10^6$ kg/cm² für 1 cm³ Eisen $A = \frac{3000^2}{2 \cdot 2{,}2 \cdot 10^6} = 2{,}06$ kgcm/cm³ und auf das Gewicht umgerechnet $A = 2{,}6$ tm/t Eisen.

Zur Kritik der Beltramischen Hypothese ist folgendes zu bemerken: Eine sehr große Zahl von Versuchen, vor allem die über zweiachsige Spannungszustände, darunter die bekannten Versuche von Guest, die als eine der Stützen der Schubspannungshypothese gelten, werden durch die Beltramische Hypothese ebenfalls sehr gut wiedergegeben.

Haigh hat 1920 den Vorschlag der Energiegrenze der Elastizität, offenbar ohne Kenntnis der Abhandlung von Beltrami und der daran anschließenden Arbeiten, wiederholt[15]). Haigh gibt in diesem Aufsatze eine sehr schöne Darstellung der verschiedenen Hypothesen für den Fall des zweiachsigen Spannungszustandes. Diese Darstellung ist auf dreiachsige Spannungszustände verallgemeinert folgende:

Faßt man die einem bestimmten Spannungszustande entsprechenden Hauptspannungen σ_1, σ_2, σ_3 als Koordinaten eines Punktes in einem rechtwinkligen Koordinatensystem 0123 auf, so ist der Inhalt der Beltramischen Hypothese der Energiegrenze der Elastizität der folgende: Alle Spannungszustände, für welche die Fließgrenze nicht erreicht wird, entsprechen Punkten σ_1, σ_2, σ_3, die innerhalb des Rotationsellipsoides

$$2EA = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \frac{2}{m}(\sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1 + \sigma_1\sigma_2) = \sigma_0^2 = \text{konstant} \qquad (4)$$

liegen. Die Rotationsachse dieses Ellipsoids schließt mit allen drei Koordinatenachsen gleiche Winkel mit den Richtungskosinus $+1/\sqrt{3}$ ein, die Längen der drei Halbachsen wechseln jedoch mit dem Werte der Querzahl m des betreffenden Baustoffes.

[14]) Man vergl. hierzu auch die in 3) und 12) genannten Arbeiten.

[15]) B. P. Haigh: The strain-energy function and the elastic limit. Engineering 1920. Vol. CIX, p. 158—160. Einen kurzen Bericht über diese Arbeit mit Anwendungen findet man in dem bei 3) genannten Aufsatze.

Für ein Material ohne Querkontraktion ($m = \infty$) geht das Ellipsoid in eine Kugel vom Halbmesser σ_0 über, während einem inkompressiblem Material ($m = 2$) ein Kreiszylinder mit dem Halbmesser $\sqrt{\frac{2}{3}}\,\sigma_0$ entspricht. Letztere Zylinderfläche ist mit der Grenzfläche nach der Huberschen Hypothese (vgl. Nr. 8) identisch[16]. Ferner entspricht in der Haighschen Darstellung der $_{\max}|\sigma|$-Hypothese das Innere eines Würfels von der Kantenlänge $2\,\sigma_F$, d. h. alle Spannungszustände mit den Hauptspannungen σ_1, σ_2, σ_3, für welche die Fließgrenze nicht erreicht wird, entsprechen Punkten innerhalb dieses Würfels. Für die $_{\max}|\varepsilon|$-Hypothese hat man entsprechend eine gerade Doppelpyramide von quadratischer Grundfläche, deren Abmessungen sich mit der Querzahl m ändern und schließlich für die Tresca-Guestsche Schubspannungshypothese ein unendlich langes sechsseitiges Prisma. Die Längsachsen der beiden letzten Körper schließen mit allen drei + Koordinatenrichtungen gleiche Winkel ein[17].

Die Mohrsche Hypothese läßt sich nicht so leicht in eine solche einfache Darstellung einfügen, da sie keine festen Vergleichsspannungen benutzt, sondern diese selbst wieder eine Funktion des Spannungszustandes sein läßt, indem sie die Vergleichsspannungen als von der auf die Gleitfläche wirkenden Normalspannung abhängig annimmt. Eine ähnliche Darstellung ist jedoch möglich, sobald man eine bestimmte Form der Umhüllungskurve zugrunde legt, worauf jedoch hier nicht weiter eingegangen werden soll. Hinsichtlich der Sandelschen Hypothese kann auf die Originalarbeit[11]) verwiesen werden, während auf die letzte der weiter unten genannten Hypothesen in Nr. 12 noch näher eingegangen werden soll.

Haigh[18]) hat in seine Darstellung eine große Anzahl von englischen Versuchsergebnissen über zweiachsige Spannungszustände eingetragen. Nach ihm werden die Versuche von Guest (1900), Crawford (1911), Batson (1917), Turner (1909), Mason (1909), Scoble (1906), Cook und Robertson durch die Hypothese der Energiegrenze der Elastizität mindestens ebensogut wiedergegeben, wie durch die früher genannten Hypothesen.

8. Bedingung von Huber. Die Hypothese der Energiegrenze der Elastizität bedarf nach Huber einer Verbesserung, die darin besteht, daß bei Verzerrungszuständen, die mit einer Volumenverminderung $e < 0$ verbunden sind, nur jener Teil der Formänderungsarbeit zu berücksichtigen ist, welcher der reinen Gestaltsänderung entspricht[19]). Dies ist auf sehr einfache Weise möglich, da über die Formänderungsarbeit der folgende Satz gilt:

»Die bezogene Formänderungsarbeit A ist für jeden beliebigen Verzerrungszustand gleich der Summe der Arbeiten, die einerseits für die Dichteänderung allein (A_p) und andererseits für die Gestaltsänderung allein (A_g) aufzuwenden sind.«

$$A = A_p + A_g \qquad (5).$$

Die der reinen Dichteänderung entsprechende Formänderungsarbeit ist[20])

$$A_p = \frac{m+1}{3\,(m-2)}\,G e^2 = \frac{3\,(m-2)}{2\,m\,E}\,p^2 \qquad (6),$$

worin

$$e = \varepsilon_x + \varepsilon_\eta + \varepsilon_z = \frac{3\,(m-2)}{m\,E}\,p \qquad (7)$$

die Volumdehnung und worin ferner

$$p = {}^1/_3\,(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \qquad (8)$$

der »mittlere hydrostatische Druck« in dem betrachteten Punkte ist. Ferner ist der zweite Bestandteil von A, die Formänderungsarbeit, die der reinen Gestaltsänderung entspricht,

---

[16]) Hencky, Zur Theorie plastischer Deformationen und der hierdurch im Material hervorgerufenen Nachspannungen. Z. f. ang. Math. u. Mech. Bd. 4, (1924), S. 323 bis 334.

[17]) Alle diese Grenzflächen schneiden die Koordinatenachsen jeweils in den gleichen Punkten, da die verschiedenen Hypothesen für einachsige Spannungszustände natürlich übereinstimmen.

[18]) Engineering 1920, CIX, S. 158 bis 160, Abb. 3 bis 5. Man vergleiche auch Fußnote 3).

[19]) Huber, Czasopismo techniczne, Lemberg 1904.

A. u. L. Föppl, Drang und Zwang. I. Bd., 2. Aufl., 1924, S. 50 bis 52.

[20]) Föppl, Drang und Zwang I, § 5.

$$A_g = \frac{1}{12G}\{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2\} + \frac{1}{2G}\{\tau_{xy}{}^2 + \tau_{yz}{}^2 + \tau_{zx}{}^2\}$$
$$= G\,\{{}^1/_3\,[(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_x)^2] + {}^1/_2\,[\gamma_{xy}{}^2 + \gamma_{yz}{}^2 + \gamma_{zx}{}^2]\} \quad . \quad . \quad (9).$$

Der Betrag von A_g bzw. σ_H an der Elastizitätsgrenze ist nach Huber für alle Spannungszustände $p < 0$ der gleiche. Für den Ansatz zur Bestimmung der plastischen Deformationen ist die Bedingung $A_g =$ konstant zuerst von Hrn. v. Mises verwendet worden [21]).

Ist nun ein beliebiger Verzerrungszustand mit einer Volumverminderung verbunden, d. h. ist $e < 0$, oder, was damit gleichbedeutend ist, $p < 0$, so hat man bei der Berechnung der Vergleichsspannung σ_H nur A_g zu berücksichtigen:

$$\sigma_H = \sqrt{2EA_g}, \quad [e < 0] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10).$$

Ist dagegen $e > 0$ $(p > 0)$, so hat man auch nach Huber die Summe $A = A_p + A_g$ zu nehmen, so wie es schon Beltrami vorgeschlagen hat [19]). Nach der Huberschen Hypothese müßte also ein hydrostatischer Druck $(p < 0)$, der zu einem gegebenen Spannungszustande hinzugefügt wird, ohne Einfluß auf die Fließgefahr sein. Dies ist aber nach Nr. 10 nicht der Fall.

Die Hubersche Hypothese gibt die Versuche für zweiachsige Spannungszustände mit $p < 0$ z. T. noch etwas besser wieder, als die von Beltrami. Jedoch scheint die von Huber angegebene Korrektur für Spannungszustände, die mit einem größeren mittleren Drucke $p < 0$ verbunden sind, nicht ausreichend zu sein, da sich z. B. für die v. Kármánschen Versuche oder die von Guest auch nicht angenähert ein konstanter Wert der Vergleichsspannung σ_H ergibt, wie es diese Hypothese verlangen würde. Man vergleiche hierzu z. B. weiter unten Zahlentafel 1 und 2, sowie Abb. 4 und 5.

9. Vorschlag einer neuen Hypothese für die Energiegrenze der Elastizität. Da die Hypothese der Energiegrenze auch mit der Huberschen Korrektur noch nicht mit allen Versuchsergebnissen in Uebereinstimmung ist, erscheint es nötig, die Hypothese so auszusprechen, daß ein größerer Spielraum bleibt, um sie neuen Versuchsergebnissen anpassen zu können [22]).

Dies läßt sich erreichen, wenn man die Hypothese der Energiegrenze der Elastizität auf die folgende Weise abändert:

Das Maß für die Höhe der Beanspruchung ist die gesamte in der Raumeinheit aufgespeicherte Formänderungsarbeit A. Die Vergleichsspannung mit der Grenzspannung σ_F im Zug- (bzw. σ_F' im Druck-)versuch ist durch $\sigma_e = \sqrt{2EA}$ gegeben. Die der Elastizitätsgrenze bzw. der Fließgrenze entsprechende Vergleichsspannung σ_e hat jedoch erfahrungsgemäß keinen für alle Spannungszustände konstanten Wert, sondern ist eine Funktion $\sigma_e(p)$ bzw. $\sigma_e(e)$ der mittleren Normalspannung $p = {}^1/_3\,(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = \frac{mE}{3\,(m-2)}\,e$, oder was auf das gleiche herauskommt, der bezogenen Volumdehnung $e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$ [23]). Die Funktion $\sigma_e(p)$ ist — ähnlich wie bei der Mohrschen Hypothese die Umhüllungskurve der Spannungskreise — für jeden Stoff durch Versuche zu bestimmen.

10. Versuche von v. Kármán und Böker. (Marmor, Sandstein und Zink unter allseitigem Druck.) [24]). Im folgenden soll die neue Hypothese an Hand der wichtigsten der bisher vorliegenden Versuche geprüft werden.

---

[21]) v. Mises, Mechanik der festen Körper im plastisch-deformablen Zustand. Göttinger Nachrichten, Math phys. Kl. 1913, S. 582—592. Die gleiche Plastizitätsbedingung wie R. v. Mises verwendet auch Hencky in der in 16) genannten Arbeit und in Hencky, Ueber langsame stationäre Strömungen in plastischen Massen mit Rücksicht auf die Vorgänge beim Walzen, Pressen und Ziehen von Metallen Zeitschr. für angew. Math. u. Mech. Bd. 5, 1925, S. 115—124.

[22]) Girtler (vgl. 13) versuchte die Abweichungen der Beltramischen Hypothese für $p \lessgtr 0$ durch eine Veränderlichkeit der Querzahl m mit p zu erklären, so daß sich m mit steigendem Drucke $(-p)$ dem Werte $m = 2$ nähern sollte, wodurch A_p gegen Null geht. Jedoch reicht auch dieser Erklärungsversuch, welcher der Huberschen Hypothese eng verwandt ist, nicht aus, die Ergebnis e der Versuche von v. Kármán und Böker zu erklären.

[23]) p und e sind bekanntlich Invarianten des Spannungs- bzw. Verzerrungstensors.

[24]) Forschungshefte 118 u. 175/176. Vergl. 9) u. 10).

Für die v. Kármánschen Versuche mit allseitigem Druck und für die Umschlingungsversuche von Böker an Marmorzylindern ist zu setzen:

$$\sigma_x = -\sigma_1, \; \sigma_y = \sigma_z = -\sigma_2 = -\sigma_3, \; \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0, \; p = -{}^1/_3\,(\sigma_1 + 2\,\sigma_2)$$

$$2\,E A_p = \frac{3\,(m-2)}{m}\,p^2, \quad 2\,E A_g = \frac{2\,(m+1)}{3\,m}\,(\sigma_1 - \sigma_2)^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; (a)$$

und für $m = 4$:

$$2\,E A_p = 1{,}5\,p^2, \quad 2\,E A_g = {}^{10}/_{12} \cdot (\sigma_1 - \sigma_2)^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (b).$$

Für die Bökerschen Torsionsversuche unter allseitigem Druck gilt

$$\sigma_x = \sigma_z, \quad p = -{}^1/_3\,(\sigma_y + 2\,\sigma_z), \quad \tau_{yz} = \tau, \quad \tau_{xy} = \tau_{zx} = 0$$

$$2\,E A_p = \frac{3\,(m-2)}{m}\,p^2, \quad 2\,E A_g = \frac{2\,(m+1)}{3\,m}\,(\sigma_x - \sigma_y)^2 + \frac{2\,(m+1)}{m}\,\tau^2 \quad . \; . \; (c)$$

und für $m = 4$:

$$2\,E A_p = 1{,}5\,p^2, \quad 2\,E A_g = {}^{10}/_{12} \cdot (\sigma_x - \sigma_y)^2 + 2{,}5\,\tau^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; (d).$$

In den beiden Forschungsheften ist nichts über die Querkontraktionsziffer m mitgeteiltt, weshalb hier der Wert $m = 4$ zugrunde gelegt wird, der dem verwendeten Material ziemlich entsprechen dürfte.

Die Vergleichsspannungen

$$\sigma_H = \sqrt{2\,E A_g} \; [\text{da } p < 0] \quad \text{und} \quad \sigma_e = \sqrt{2\,E\,(A_p + A_g)}$$

an der »Elastizitätsgrenze« wurden für Marmor und die in

Zahlentafel 1 bei v. Kármán, Forsch.-Heft 118 S. 54,
» 2 » Böker, » » 175/176 » 16,
» 4 » Böker, » » » » 26

angegebenen Versuchswerte berechnet und in den folgenden Zahlentafeln zusammengestellt. (Alle Spannungsgrößen in kg/cm² und Rechenschiebergenauigkeit.)

Zahlentafel 1.
Marmor. Druckversuche von v. Kármán. »Elastizitätsgrenze«.

Nr.	σ_x	$\sigma_y = \sigma_z$	p	$2\,E A_p$	$2\,E A_g$	σ_H	σ_e
1, 2	− 1360	0	− 453	$0{,}309 \cdot 10^6$	$1{,}54 \cdot 10^6$	1240	1360
3	− 2335	− 235	− 935	$1{,}31 \cdot 10^6$	$3{,}68 \cdot 10^6$	1915	2230
4	− 3150	− 500	− 1383	$2{,}87 \cdot 10^6$	$5{,}86 \cdot 10^6$	2420	2950
5	− 3565	− 685	− 1645	$4{,}07 \cdot 10^6$	$6{,}92 \cdot 10^6$	2630	3310
6	− 4055	− 845	− 1915	$5{,}51 \cdot 10^6$	$8{,}59 \cdot 10^6$	2930	3750
7	− 5550	− 1650	− 2950	$13{,}1 \cdot 10^6$	$12{,}7 \cdot 10^6$	3560	5080
Z. V.[25]	− 310	− 4405	− 3040	$14{,}0 \cdot 10^6$	$13{,}9 \cdot 10^6$	3730	5280

Zahlentafel 2.
Marmor. Umschlingungsversuche von Böker. »Elastizitätsgrenze«.

Nr.	σ_x	$\sigma_y = \sigma_z$	p	$2\,E A_p$	$2\,E A_g$	σ_H	σ_e
1	− 1320	− 5480	− 4093	$25{,}2 \cdot 10^6$	$14{,}5 \cdot 10^6$	3800	6300
2	− 1080	− 5020	− 3707	$20{,}7 \cdot 10^6$	$12{,}9 \cdot 10^6$	3600	5790
3	− 850	− 4510	− 3290	$16{,}3 \cdot 10^6$	$11{,}2 \cdot 10^6$	3360	5230
4	− 665	− 3955	− 2858	$12{,}3 \cdot 10^6$	$9{,}04 \cdot 10^6$	3005	4620
5	− 595	− 3850	− 2765	$11{,}5 \cdot 10^6$	$8{,}85 \cdot 10^6$	2970	4510
6	− 150	− 2420	− 1663	$4{,}16 \cdot 10^6$	$4{,}30 \cdot 10^6$	2070	2910

Die Vergleichsspannungen $\sigma_e = \sqrt{2\,E A}$ für die Elastizitätsgrenze des Marmors sind ohne jegliche Korrektur nach den Zahlentafeln 1, 2, 3 in Abb. 1 über den Abszissen p aufgetragen. Man erkennt, daß die Punkte längs einer Kurve $\sigma_e = \sigma_e\,(p)$ liegen, wobei besonders beachtenswert ist, daß sich die Werte für die Torsionsversuche unter allseitigem

[25]) Diese Werte für den sogen. »Zugversuch« sind in der Z. d. V. d. I. Bd. 55 (1911), S. 1757 mitgeteilt.

Zahlentafel 3.

Marmor. Torsionsversuche von Böker. »Elastizitätsgrenze«.

Nr.	σ_y	$\sigma_x = \sigma_z$	p	τ	$2\,E\,A_p$	$2\,E\,A_g$	σ_H	σ_e
1	0	0	0	179	$0 \cdot 10^6$	$0,08 \cdot 10^6$	283	283
2	− 304	− 304	− 304	685	$0,14 \cdot 10^6$	$1,17 \cdot 10^6$	1085	1145
4	− 1304	− 1304	− 1304	1325	$2,56 \cdot 10^6$	$4.40 \cdot 10^6$	2095	2630
5 a	− 2423	− 2423	− 2423	1960	$8,82 \cdot 10^6$	$9,64 \cdot 10^6$	3100	4290
5 b	− 1980	− 1980	− 1980	1885	$5,88 \cdot 10^6$	$8,90 \cdot 10^6$	2985	3840
5 c	− 1670	− 1670	− 1670	1850	$4,18 \cdot 10^6$	$8,56 \cdot 10^6$	2925	3570
5 d	− 1040	− 1040	− 1040	1100	$1,63 \cdot 10^6$	$3,03 \cdot 10^6$	1740	2155
6	− 473	− 473	− 473	764	$0,34 \cdot 10^6$	$1,47 \cdot 10^6$	1215	1345
a	− 2800	− 900	− 1533	1660	$3.53 \cdot 10^6$	$9,91 \cdot 10^6$	3150	3670
b	− 2395	− 580	− 1185	1050	$2,11 \cdot 10^6$	$5,51 \cdot 10^6$	2350	2780
c	− 2770	− 665	− 1367	1222	$2,81 \cdot 10^6$	$7,43 \cdot 10^6$	2730	3 00

Druck gut mit den v. Kármánschen Versuchen mit allseitigem Druck decken. Die Streuung der Punkte ist um so geringer zu veranschlagen, da die Werte der »Elastizitätsgrenze« (d. i. bei den v. Kármánschen und Bökerschen Versuchen die höchste erreichte Spannung) entsprechen, die für diese hohen allseitigen Drucke nicht scharf ausgeprägt ist. Die Abweichungen werden noch kleiner, wenn man statt der unscharfen »Elastizitätsgrenze« die ziemlich deutlich ausgeprägte Proportionalitätsgrenze verwendet. Die Spannungen an der Proportionalitätsgrenze wurden aus den Spannungsdehnungskurven entnommen und sind deshalb nicht so genau, wie die Werte der Zahlentafeln 1 und 2. Man erhält dann die in den Zahlentafeln 4 und 5 angegebenen Werte der Vergleichsgrenzspannungen σ_e, welche in Abb. 2 aufgezeichnet sind und die Funktion $\sigma_e(p)$ sehr deutlich hervortreten lassen.

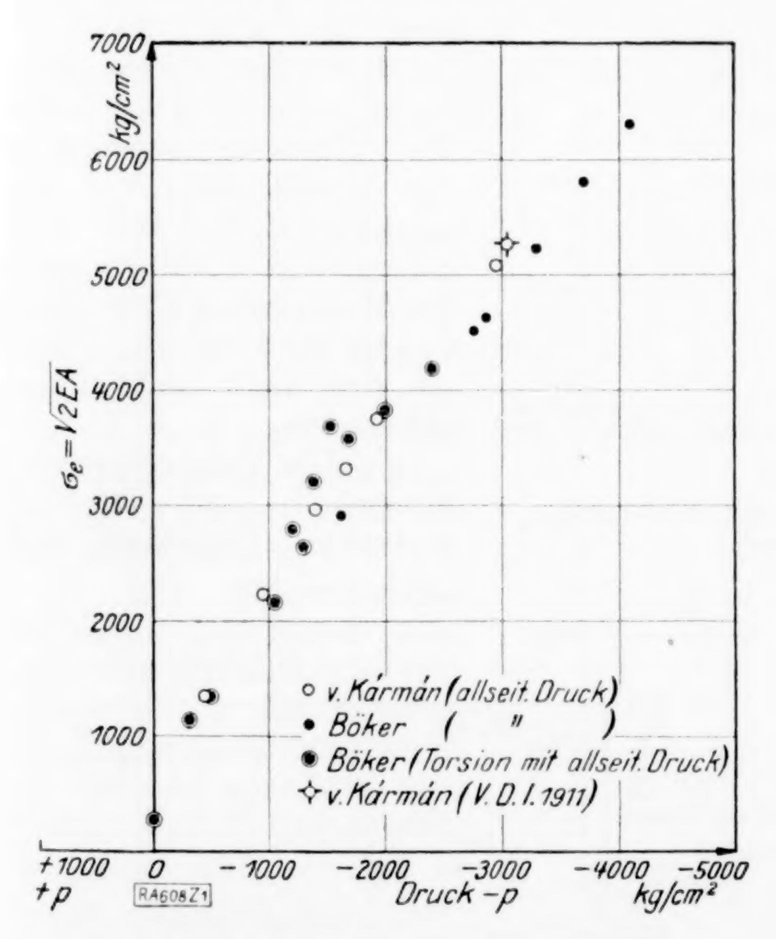


Abb. 1. Marmor. Vergleichsspannungen $\sigma_e = \sqrt{2\,E\,A}$ für die »Elastizitätsgrenze«.

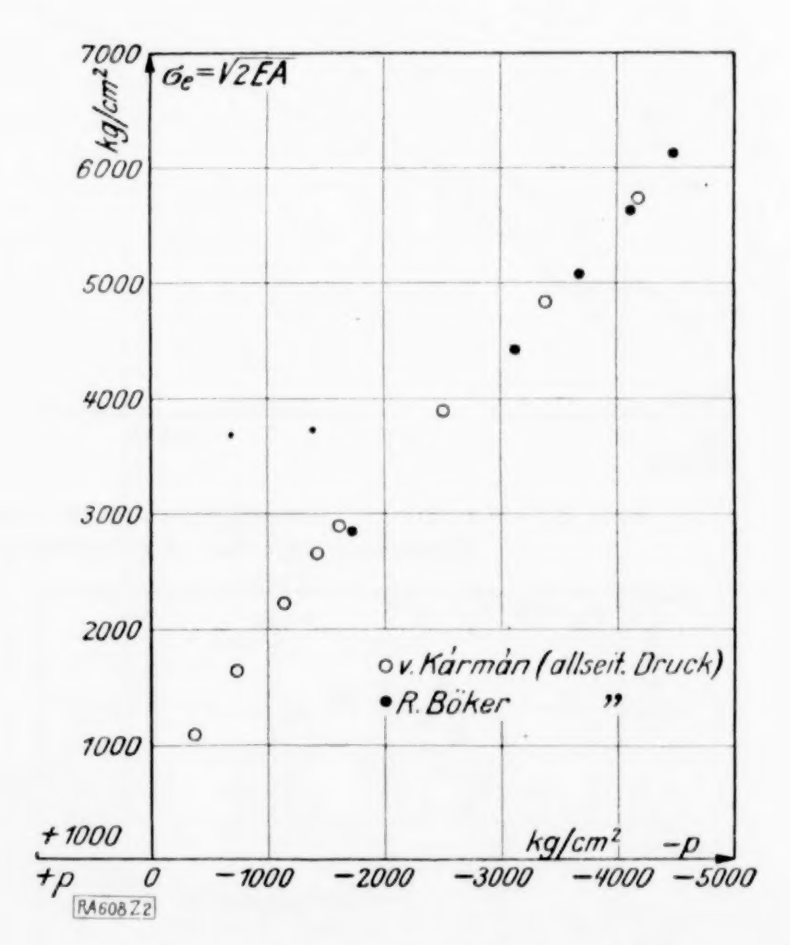


Abb. 2. Marmor. Vergleichsspannungen $\sigma_e = \sqrt{2\,E\,A}$ für die »Proportionalitätsgrenze«.

Wegen des Reibungseinflusses ist es leider nicht ohne weiteres möglich, aus den im Forschungsheft 175/176 mitgeteilten Daten die Werte der Spannungen an der Proportionalitätsgrenze auch für die Torsionsversuche einigermaßen genau zu entnehmen. Ein Vergleich gab genügende Uebereinstimmung mit den anderen Werten.

Zahlentafel 4.

Marmor. Druckversuche von v. Kármán. »Proportionalitätsgrenze«.

Nr.	$\sigma_y - \sigma_x$	σ_x	$\sigma_y = \sigma_z$	p	$2\,E\,A_p$	$2\,E\,A_g$	σ_H	σ_e
1 u. 2	1100	− 1100	0	− 367	$0{,}20 \cdot 10^6$	$1{,}01 \cdot 10^6$	1005	1100
3	1500	− 1735	− 235	− 735	$0{,}81 \cdot 10^6$	$1{,}87 \cdot 10^6$	1365	1635
4	1900	− 2400	− 500	− 1133	$1{,}93 \cdot 10^6$	$3{,}02 \cdot 10^6$	1735	2225
5	2200	− 2885	− 685	− 1418	$3{,}02 \cdot 10^6$	$4{,}03 \cdot 10^6$	2010	2650
6	2300	− 3145	− 845	− 1612	$3{,}91 \cdot 10^6$	$4{,}42 \cdot 10^6$	2100	2890
7	2600	− 4250	− 1650	− 2517	$9{,}50 \cdot 10^6$	$5{,}64 \cdot 10^6$	2375	3890
8	2700	− 5190	− 2490	− 3390	$17{,}3 \cdot 10^6$	$6{,}10 \cdot 10^6$	2470	4830
9	2800	− 6060	− 3236	− 4193	$26{,}4 \cdot 10^6$	$6{,}54 \cdot 10^6$	2550	5740

Zahlentafel 5.

Marmor. Druckversuche von Böker. »Proportionalitätsgrenze«.

Nr	$\sigma_y - \sigma_x$	σ_x	σ_y	p	$2\,E\,A_p$	$2\,E\,A_g$	σ_H	σ_e
1	3000	− 2480	− 5480	− 4480	$30{,}2 \cdot 10^6$	$7{,}50 \cdot 10^6$	2740	6130
2	2700	− 2320	− 5020	− 4120	$25{,}5 \cdot 10^6$	$6{,}08 \cdot 10^6$	2470	5620
3	2500	− 2010	− 4510	− 3677	$20{,}3 \cdot 10^6$	$5{,}22 \cdot 10^6$	2290	5070
5	2400	− 1650	− 3850	− 3117	$14{,}6 \cdot 10^6$	$4{,}80 \cdot 10^6$	2050	4410
6	2100	− 320	− 2420	− 1720	$4{,}44 \cdot 10^6$	$3{,}68 \cdot 10^6$	1920	2850

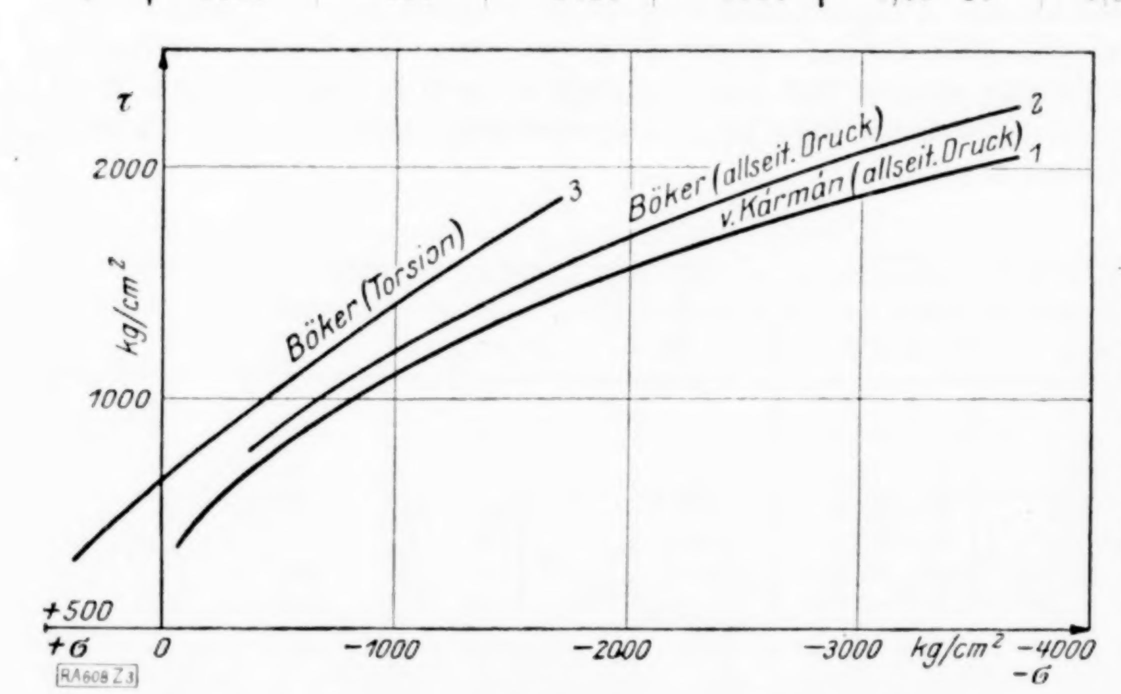


Abb. 3. Marmor. Umhüllungskurven nach der Mohrschen Hypothese für die »Elastizitätsgrenze«.

Mit den in Abb. 1 und 2 gezeichneten Funktionen $\sigma_e(p)$ für die Elastizitäts- und die Proportionalitätsgrenze vergleiche man die drei Einhüllenden der Spannungskreise, die in Abb. 3 für die drei Versuchsreihen von Zahlentafel 1, 2, 3 gezeichnet sind. Die drei Kurven 1, 2, 3 sollten nach der Mohrschen Hypothese zusammenfallen, was sie aber auch nicht angenähert tun.

Die Vergleichsspannungen σ_H nach der Huberschen Hypothese sind

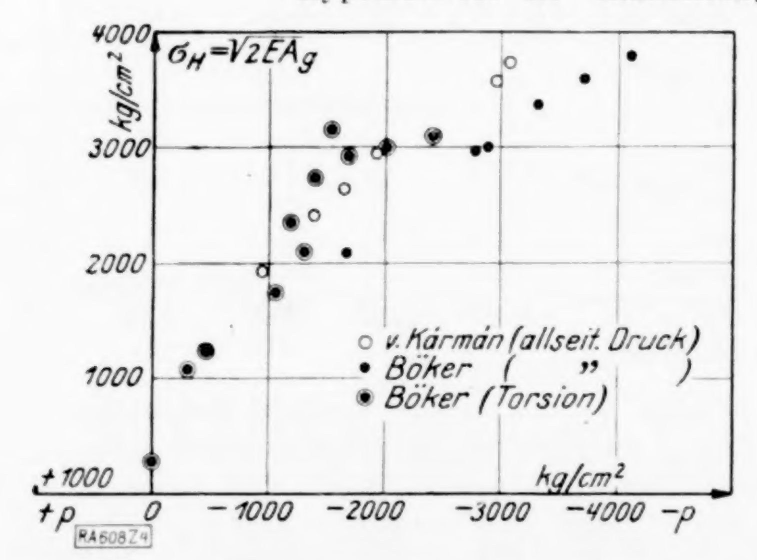


Abb. 4. Marmor. Vergleichsspannungen $\sigma_H = \sqrt{2\,E\,A_g}$ (nach Huber) für die »Elastizitätsgrenze«.

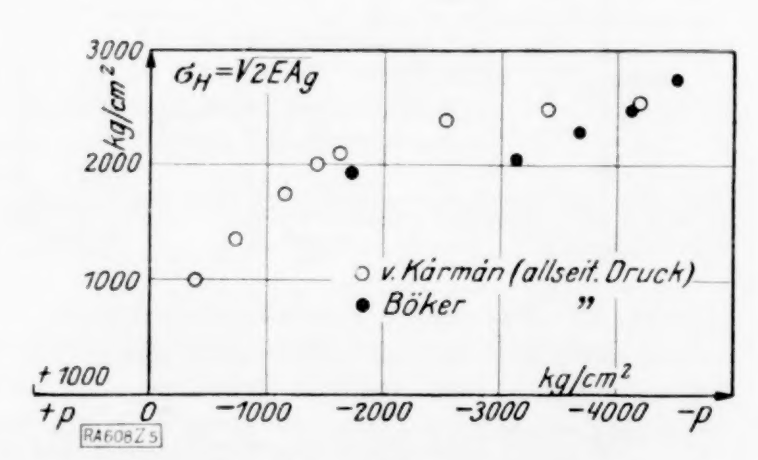


Abb. 5. Marmor. Vergleichsspannungen $\sigma_H = \sqrt{2\,E\,A_g}$ (nach Huber) für die »Proportionalitätsgrenze«.

in Abb. 4 für die Elastizitätsgrenze und in Abb. 5 für die Proportionalitätsgrenze aufgetragen, woraus man erkennt, daß die Hubersche Hypothese einer konstanten Vergleichsspannung σ_H nicht zutreffend sein kann.

Dagegen stimmt die neue Hypothese der Energiegrenze der Elastizität so gut mit den Versuchsergebnissen von Böker und v. Kármán überein, als man in Anbetracht der großen Unsicherheit bei diesen schwierigen Versuchen überhaupt verlangen kann.

Für die von v. Kármán (Forschungsh. 118, S. 54) mitgeteilten Versuche mit Sandstein erhält man mit $m = 4$ die in der Zahlentafel 6 eingetragenen Werte für die Vergleichsspannung an der »Elastizitätsgrenze« und für die (aus Forschungsh. 118, Abb. 8, S. 52 entnommenen) entsprechenden Werte an der Proportionalitätsgrenze, die allerdings bei Sandstein nicht so gut ausgeprägt ist, wie bei Marmor, die Werte der Zahlentafel 7.

Zahlentafel 6.
Sandstein. »Elastizitätsgrenze«.

Nr.	σ_x	$\sigma_y = \sigma_z$	p	$2\,E\,A_p$	$2\,E\,A_g$	σ_e
1	− 690	0	− 230	$0{,}078 \cdot 10^6$	$0{,}397 \cdot 10^6$	690
2	− 2320	− 280	− 960	$1{,}385 \cdot 10^6$	$3{,}47 \cdot 10^6$	2190
3	− 3135	− 555	− 1415	$3{,}01 \cdot 10^6$	$5{,}55 \cdot 10^6$	2925
4	− 4850	− 1550	− 2650	$10{,}55 \cdot 10^6$	$9{,}07 \cdot 10^6$	4430

Zahlentafel 7.
Sandstein. »Proportionalitätsgrenze«.

Nr.	σ_x	$\sigma_y = \sigma_z$	p	$2\,E\,A_p$	$2\,E\,A_g$	σ_e
1	− 600	0	− 200	$0{,}06 \cdot 10^6$	$0{,}30 \cdot 10^6$	600
2	− 1400	− 280	− 653	$0{,}64 \cdot 10^6$	$1{,}05 \cdot 10^6$	1300
3	− 2200	− 555	− 1103	$1{,}83 \cdot 10^6$	$2{,}26 \cdot 10^6$	2020
4	− 2500	− 1550	− 1870	$5{,}25 \cdot 10^6$	$0{,}75 \cdot 10^6$	2450
5	− 2600	− 2475	− 2517	$9{,}53 \cdot 10^6$	$0{,}013 \cdot 10^6$	3090

Die Vergleichsspannungen σ_e an der Elastizitäts- und Proportionalitätsgrenze sind in Abb. 6 aufgetragen, woraus man für die Funktion $\sigma_e(p)$ bei Sandstein einen ganz ähnlichen Verlauf wie bei Marmor erkennt.

Die Bökerschen Versuche mit Zink sind nur mit Vorsicht zu vergleichen, da die Elastizitätsgrenze nicht festgestellt wurde und auch die bleibenden Verzerrungen nicht mitgeteilt sind, so daß es kaum möglich ist, Vergleichsspannungen zu berechnen, die sich auf genau einander entsprechende Zustände beziehen. Um ein Bild über den Verlauf von $\sigma_e(p)$ zu gewinnen, wurden nach Böker (Zahlentafel 3, S. 20) die Vergleichsspannungen bei 12 vH Dehnung berechnet.

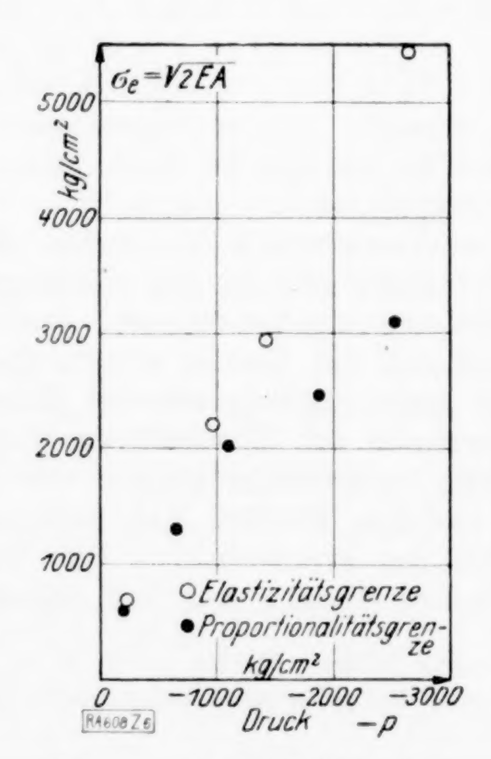
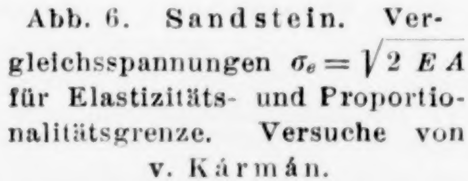



Abb. 6. Sandstein. Vergleichsspannungen $\sigma_e = \sqrt{2\,E\,A}$ für Elastizitäts- und Proportionalitätsgrenze. Versuche von v. Kármán.

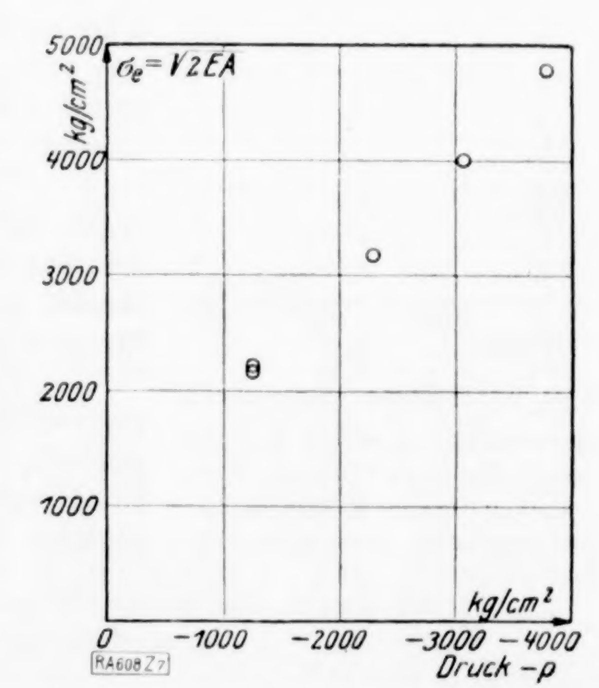


Abb. 7. Zink. Vergleichsspannungen $\sigma_e = \sqrt{2\,E\,A}$ für eine Dehnung von 12 vH nach den Versuchen von R. Böker.

Zahlentafel 8.

Zink. Versuche von Böker.

Nr.	σ_x	$\sigma_y = \sigma_z$	p	$2\,E\,A_p$	$2\,E\,A_g$	σ_e
1	-70	-1830	-1243	$2{,}32 \cdot 10^6$	$2{,}58 \cdot 10^6$	2210
5	-120	-1800	-1240	$2{,}32 \cdot 10^6$	$2{,}36 \cdot 10^6$	2165
6	-1200	-2820	-2280	$7{,}80 \cdot 10^6$	$2{,}18 \cdot 10^6$	3160
3	-2060	-3560	-3060	$14{,}1 \cdot 10^6$	$1{,}87 \cdot 10^6$	4000
4	-2840	-4240	-3773	$21{,}3 \cdot 10^6$	$1{,}63 \cdot 10^6$	4785

Darin ist nach Stephan[26]) $m = 4{,}0$ eingesetzt. Auch diese Werte $\sigma_e(p)$, die nur eine mehr oder weniger gute Annäherung darstellen, lassen nach Abb. 7 eine scharf ausgeprägte Gesetzmäßigkeit erkennen.

11. Versuche von Guest mit Eisenrohren. Entsprechende Versuche für allseitigen Zug ($p > 0$) liegen für Marmor, Sandstein und Zink m. W. bisher nicht vor. Für Metalle kommen neben den Versuchen von Böker mit Zink besonders noch die Versuche von Guest mit Rohren aus Eisen, Kupfer und Messing für einen Vergleich in Frage[27]). Es sind dies Messungen an Rohren unter hydraulischem Innendruck, Längszug und Torsion ($p > 0$). Versuche über Spannungszustände $p < 0$ hat Guest leider nicht ausgeführt.

Guest benutzte das gleiche Rohr bei der Bestimmung der Elastizitätsgrenze unter verschiedenen Spannungszuständen jeweils bis zu 20 Einzelversuchen. Da die Elastizitätsgrenze bei jedem einzelnen Versuche erreicht und etwas überschritten wurde, so ist i. a. mit jedem Versuch eine Verfestigung des Materials eingetreten, die aus den von Guest mitgeteilten Zahlen dann auch an vielen Stellen sehr deutlich zu erkennen ist (bis zu 10 vH Verfestigung). Es ist sehr schwer, diesen Einfluß auszuschalten.

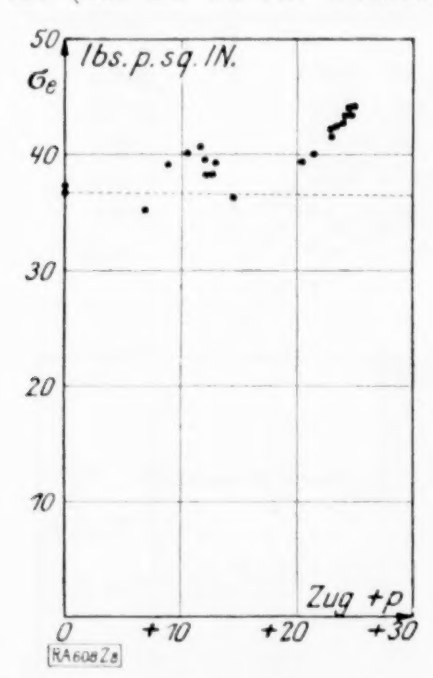


Abb. 8. Eisen. Vergleichsspannungen $\sigma_e = \sqrt{2\,E\,A}$ für eine der Guestschen Versuchsreihen. Fließgrenze, $p > 0$, $m = 3{,}04$.

Die Guestschen Versuche zeigen jedoch ganz deutlich, daß auch für dehnbare Metalle ebenso wie bei spröden Steinen eine — wenn auch schwächere — Veränderung der Vergleichsspannung an der Fließgrenze mit der mittleren Spannung p erfolgt. Als Beispiel ist in Abb. 8 eine der Versuchsreihen von Guest (loc. cit., p. 111, Table VI, tube VII.) aufgezeichnet.

Nach den Guestschen Versuchen findet bei Eisen auch für $p > 0$ ein Ansteigen von $\sigma_e(p)$ statt, so daß bei $p = 0$ oder in der Nähe von $p = 0$ ein Kleinstwert von $\sigma_e(p)$ vorhanden zu sein scheint. Dementsprechend hätte man dann i. a. für reine oder überwiegende Schubbeanspruchung die kleinste zulässige Vergleichsspannung σ_e[28]).

Die Guestschen Versuche, die durch die neue Hypothese mindestens ebenso gut wiedergegeben werden, wie durch die Schubspannungshypothesen, erstrecken sich, wie schon bemerkt, nur auf das Gebiet $p \geq 0$; doch dürften die Verhältnisse für $p < 0$ ganz ähnlich wie bei Marmor liegen.

Versuche mit Eisenrohren unter Innendruck und Längszug wurden neuerdings wieder von W. Lode in Göttingen angestellt, um den Einfluß der mittleren Hauptspannung auf die Fließgrenze zu ermitteln[29]). Bei diesen Versuchen wurde das gleiche Rohr (ebenso wie bei jenem von Guest) jeweils zu

[26]) Stephan, Die Elastizität gerader Stäbe. Berlin 1922, S. 5.

[27]) Guest, On the strenght of ductile materials under combined stress. Phil. Mag. (5) Vol. L. 1900, p. 69—132.

[28]) Der Verlauf der aus den Guestschen Versuchszahlen berechneten Kurven ist für die einzelnen Versuchsreihen ziemlich ähnlich und es scheint nicht ausgeschlossen, daß es gelingen wird, die Funktionen $\sigma_e(p)$ für die verschiedenen Eisensorten (bei den Guestschen Versuchen bewegte sich z. B. m zwischen 2,37 und 3,48) in eine einzige Funktion zusammenzufassen, in die dann m und vielleicht auch noch E als Parameter eintreten würde.

[29]) W. Lode, Versuche über den Einfluß der mittleren Hauptspannung auf die Fließgrenze. Zeitschr. für angew. Math. u. Mech., Bd. 5, 1925, S. 142—144

Die in der Zahlentafel 9 angegebenen Hauptspannungen an der Fließgrenze sind aus bisher unveröffentlichten Versuchswerten berechnet, welche dem Verfasser von Herrn W. Lode, Göttingen freundlicherweise zur Verfügung gestellt wurden, wofür ihm auch hier bestens gedankt sei.

einer ganzen Versuchsreihe verwendet. Der Einfluß der Verfestigung ist z. B. in Abb. 9 deutlich ersichtlich, worin beide mit Z bezeichnete Punkte einachsigen Spannungszuständen entsprechen (die eingeschriebenen Ziffern bezeichnen den betreffenden Teilversuch). Das Material der einzelnen Versuchskörper war von verschieden großer »Zugfestigkeit«. In Abb. 10 sind deshalb nur die ersten 4, 2 bzw. 6 Versuche mit den Probekörpern III 1, III 2 und III 4 aufgetragen, welche Rohre aus Eisenstäben von fast gleicher Zugfestigkeit gedreht wurden. Die zugehörigen Hauptspannungen an der Fließgrenze sind (für $m = {}^{10}/_3$) in der Zahlentafel 9 angegeben. Die Unsicherheit der Zahlenwerte beträgt bei p etwa 35 kg/cm² und bei σ_e etwa 50 kg/cm².

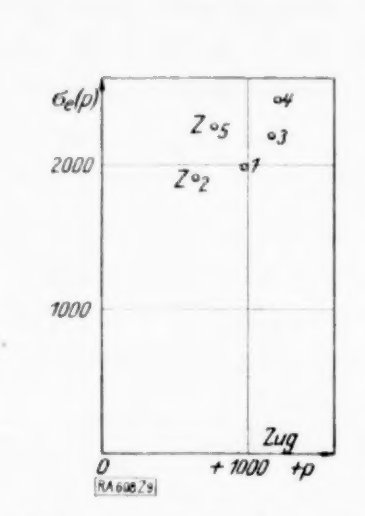


Abb. 9. Versuche von W. Lode mit Eisenrohren. Vergleichsspannungen $\sigma_e(p) = \sqrt{2\ E\ A}$ für die Fließgrenze. Versuchsreihe *III 5*. (Z = einachsige Spannungszustände).

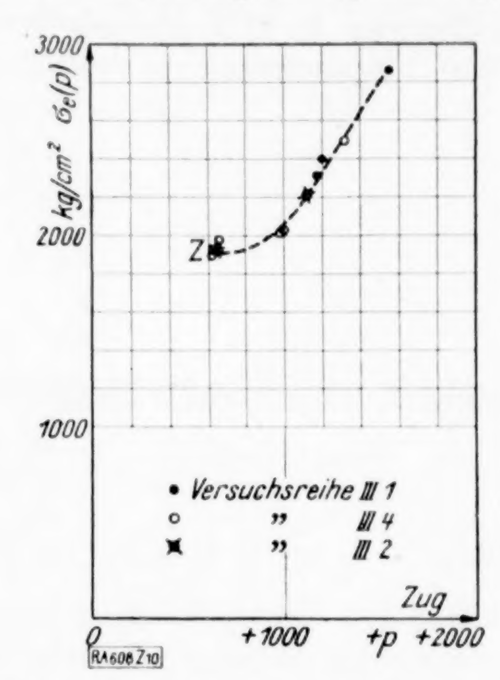


Abb. 10. Versuche von W. Lode mit Eisenrohren. Vergleichsspannungen $\sigma_e(p)$ für die Fließgrenze.

Die Abb. 10 gibt eine Bestätigung der schon aus den Guestschen Versuchen gezogenen Schlüsse. Vor allem erkennt man, daß die Funktion $\sigma_e(p)$ auch im Zuggebiet $p > 0$ ansteigt.

Zahlentafel 9.

Versuche von W. Lode mit Eisenrohren unter Innendruck und Längszug.

Körper	Versuch	σ_1	σ_2	σ_3	σ_e	$+p$	Bemerkungen
III 1	1	0	1955	0	1955	652	Z.
	2	1215	2445	— 48	2400	1204	—
	3	2310	1282	— 91	2325	1167	—
	4	2485	2270	— 98	2870	1552	—
III 2	1	0	1925	0	1925	642	Z.
	2	1120	2260	— 44	2225	1112	—
III 4	1	0	1915	0	1915	638	Z.
	2	1025	2050	— 62	2030	1004	—
	3	990	2035	— 60	2010	988	—
	4	0	1980	0	1980	660	Z.
	5	2045	2055	— 124	2490	1325	—
	6	0	1900	0	1900	633	Z.
III 5	1	1015	1990	— 61	1975	981	—
	2	0	1915	0	1915	638	Z.
	3	1825	1805	— 110	2205	1173	—
	4	1228	2460	— 74	2450	1205	—
	5	0	2315	0	2315	772	Z.

Alle Spannungen in kg/cm².

12. Die neue Hypothese in der Haighschen Darstellung. Faßt man die zu einem beliebigen Spannungszustande gehörenden Hauptspannungen σ_1, σ_2, σ_3 wie in Nr. 7 als Koordinaten in einem rechtwinkligen kartesischen Koordinatensystem auf, so ist die »Grenzfläche« für die innerhalb des elastischen Bereiches liegenden Spannungszustände nach der neuen Hypothese der Energiegrenze der Elastizität durch

$$2EA = \sigma_e^2(p) = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \frac{2}{m}(\sigma_2\,\sigma_3 + \sigma_3\,\sigma_1 + \sigma_1\,\sigma_2) \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

gegeben, worin $\sigma_e(p)$ als bekannte Funktion von $p = {}^1/_3(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$ vorausgesetzt ist. (11) ist die Gleichung einer Umdrehungsfläche, deren Rotationsachse z mit den Koordinatenrichtungen 1, 2, 3 gleiche Winkel einschließt $[\cos(z/1) = \cos(z/2) = \cos(z/3) = +1/\sqrt{3}]$. Eine Hauptachsentransformation für (11) wird z. B. durch das Schema

	σ_1	σ_2	σ_3
x	$+1/\sqrt{2}$	$-1/\sqrt{2}$	0
y	$+1/\sqrt{6}$	$+1/\sqrt{6}$	$-2/\sqrt{6}$
z	$+1/\sqrt{3}$	$+1/\sqrt{3}$	$+1/\sqrt{3}$

geleistet. Man erhält damit

$$\frac{m+1}{m}(x^2 + y^2) + \frac{m-2}{m} z^2 = \sigma_e^2(p) \quad \ldots \ldots \quad (12).$$

Da $p = {}^1/_3(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \frac{z}{\sqrt{3}}$ ist, liegen alle Punkte, die Spannungszuständen mit der gleichen mittleren Spannung p entsprechen, auf »Breitenkreisen« $z =$ konstant der Umdrehungsfläche (12), wobei die Entfernungen z dieser Kreise von der Ebene $z = 0$ bis auf den Faktor $1/\sqrt{3}$ die mittlere Spannung p messen. Diese Tatsache erlaubt die Konstruktion des Breitenkreises, sobald einer seiner Punkte bekannt ist.

Setzt man in den Gl. (11) und (12) $\sigma_e(p)$ in der Form

$$\sigma_e(p) = \sigma_0 \{1 + f(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)\} \quad \ldots \ldots \quad (13),$$

ein, wobei $f(0) = 0$ sein soll[30]), so wird

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \frac{2}{m}(\sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1 + \sigma_1\sigma_2) + \\ - \sigma_0^2\{f^2(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) + 2f(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)\} = \sigma_0^2 \quad \ldots \quad (14),$$

bzw.

$$\frac{m+1}{m}\left\{\left(\frac{x}{\sigma_0}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sigma_0}\right)^2\right\} + \frac{m-2}{m}\left(\frac{z}{\sigma_0}\right)^2 - 2f(\sqrt{3}\,z) - f^2(\sqrt{3}\,z) = 1 \quad \ldots \quad (15).$$

Ist nun $f(z)$ bzw. $\sigma_e(p)$ eine gerade Funktion von p, so ist diese Fläche bezüglich der Ebene $p = z = 0$ symmetrisch, so daß die Grenzflächen für das Zuggebiet $p > 0$ und das Druckgebiet $p < 0$ kongruent sind. Ist $\sigma_e(p)$ keine gerade Funktion, so ist die Umdrehungsfläche nicht mehr bezüglich der Ebene $z = 0$ symmetrisch. Man erhält dann für $p \lessgtr 0$ verschiedene Grenzflächengestalt.

Es dürfte für die meisten Baustoffe möglich sein, die Funktion $\sigma_e(p)$ in einem größeren Intervalle $p' < p < p''$ mit ausreichender Annäherung durch eine Gerade oder durch eine Parabel zu ersetzen. Insbesondere wird es immer möglich sein, $\sigma_e(p)$ in einem genügend kleinen Intervalle durch ein Geradenstück anzunähern, welcher Fall deshalb etwas näher behandelt werden soll. Bei der Grenzfläche entspricht jedem solchen Intervalle eine Ringfläche, die durch zwei Breitenkreise (in den Ebenen $z' = \sqrt{3}\,p'$ bzw. $z'' = \sqrt{3}\,p''$ begrenzt ist.

Mit einer linearen Annäherung für $\sigma_e(p)$

$$\sigma_e = \sigma_0 \left\{1 - \varkappa \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{\sigma_0}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (16),$$

wie man sie z. B. nach den Abb. 2 und 7 für Marmor und Zink fast innerhalb des ganzen von v. Kármán und Böker untersuchten Intervalls zugrunde legen kann, gilt sodann

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\frac{\frac{1}{m} + \varkappa^2}{1 - \varkappa^2}(\sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1 + \sigma_1\sigma_2) + \frac{2\varkappa}{1 - \varkappa^2}\sigma_0(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \frac{\sigma_0^2}{1 - \varkappa^2} \quad (17),$$

und nach Transformation auf das Hauptachsenkreuz xyz mit $f(\sqrt{3}\,z) = -\sqrt{3}\,\varkappa \cdot \frac{z}{\sigma_0}$

---

[30]) Für reine Schubbeanspruchung ist mit $\sigma_3 = 0$, $\sigma_2 = -\sigma_1 = \tau$ und $p = 0$:

$$\sigma_e^2 = \frac{2(m+1)}{m}\sigma_1^2 = \frac{E}{G}\sigma_1^2 = \frac{E}{G}\tau^2 = \sigma_0^2.$$

$$\frac{\left(\frac{x}{\sigma_0}\right)^2+\left(\frac{y}{\sigma_0}\right)^2}{\frac{m-2}{m+1}\cdot\frac{1}{\frac{m-2}{m}-3\varkappa^2}}+\frac{\left(\frac{z}{\sigma_0}+\frac{\sqrt{3}\varkappa}{\frac{m-2}{m}-3\varkappa^2}\right)^2}{\frac{m-2}{m}\cdot\frac{1}{\left(\frac{m-2}{m}-3\varkappa^2\right)^2}}=+1 \quad \ldots \quad (18),$$

Ist $a=\frac{m-2}{m}-3\varkappa^2>0$, d. h.

$$\varkappa<\stackrel{+}{\sqrt{\frac{m-2}{3m}}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (19),$$

so stellt die Gl. (18) ein **Rotationsellipsoid** mit der Rotationsachse z und dem Mittelpunkte

$$z_0=-\frac{\sqrt{3}\varkappa\sigma_0}{\frac{m-2}{m}-3\varkappa^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (20)$$

dar. Daß die Grenzfläche bei linearen Gesetzen $\sigma_e(p)$, die der Ungleichung (19) genügen, ebenso wie bei der Beltramischen Hypothese, — die als Sonderfall $\sigma_e(p)=$ konst. $=\sigma_0$ mit $\varkappa=0$ natürlich in Gl. (18) mit eingeschlossen ist, — ein Rotationsellipsoid bleibt, ist für die Einfachheit der Anwendungen der Hypothese sehr wichtig. Die Entfernung z_0 des Mittelpunkts von der Ebene $z=0$ ist aber jetzt nicht mehr null, sondern außer von σ_0 noch von der Neigung $3\varkappa$ und von der Querzahl m abhängig.

Für den Fall, daß $\sigma_e(p)$ im ganzen Bereich von p eine lineare Funktion ist, kann man an Gl. (19) noch einige weitergehende Schlüsse anknüpfen: Da unendlich große Spannungen ausgeschlossen sind, müssen unter obiger Voraussetzung die beiden Fälle $a<0$ (zweischaliges Rotationshyperboloid) und $a=0$ (ohne geometrische Bedeutung) unmöglich sein, so daß dann $\varkappa$ unter allen Umständen der Ungleichung (19) genügen muß. Die Steigung der Geraden $\sigma_e(p)$ kann dann den Betrag $\frac{d\sigma_e(p)}{d(-p)}=3\varkappa'=3\sqrt{\frac{m-2}{3m}}$ nicht erreichen.

Bei den Anwendungen ist es besonders wichtig, die Punkte größter und kleinster Vergleichsspannung $\sigma_e(p)$ zu kennen. Diese entsprechen, wie man leicht einsieht, den Spannungszuständen $\sigma_1=\sigma_2=\sigma_3=p$, womit man unter Beachtung von $x=y=0$ und $z=\sqrt{3}p$ die folgenden Werte erhält:

$$\left.\begin{aligned} p_{\substack{\max\\\min}} &= \pm\frac{\sigma_0}{3}\frac{1}{\sqrt{\frac{m-2}{3m}}\pm\varkappa} \\ (\sigma_e)_{\substack{\max\\\min}} &= \sigma_0\frac{1}{1\mp\varkappa\sqrt{\frac{3m}{m-2}}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (21).$$

Durch diese Beziehungen wird die Bedeutung der Ungleichung (19) erst richtig klar. $\varkappa=\sqrt{\frac{m-2}{3m}}$ hätte $p_{\min}=\infty$ zur Folge, d. h. der betreffende Stoff hätte (immer über das ganze Gebiet ein lineares Gesetz für $\sigma_e(p)$ vorausgesetzt!) unendlich große Druckfestigkeit und für $\varkappa>\sqrt{\frac{m-2}{3m}}$ sogar eine »positive Druckfestigkeit«, was natürlich ausgeschlossen ist.

Es sei noch darauf hingewiesen, daß es bei Baustoffen, für die bekannt ist, daß sie in einem bestimmten Intervalle dem linearen Gesetz $\sigma_e(p)=\sigma_0\{1-3\varkappa p\}$ genügen, ausreichend ist, wenn man neben der Querzahl m noch zwei Punkte der Geraden $\sigma_e(p)$ kennt, da man daraus σ_0 und $\varkappa$ berechnen kann, wodurch das Ellipsoid (18) bereits vollständig bestimmt ist.

Gilt das lineare Gesetz für $\sigma_e(p)$ nur in einem begrenzten Intervall $p'<p<p''$, so ist der Fall $a<0$, d. h. $\varkappa>\sqrt{\frac{m-2}{3m}}$ (zweischaliges Rotationshyperboloid) nicht grundsätzlich ausgeschlossen.

Kann man die Funktion $\sigma_e(p)$ innerhalb eines bestimmten Intervalls genügend genau durch die Parabel

$$\sigma_e^2 = \sigma_0^2 \left\{ 1 - \lambda \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{\sigma_0} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

ersetzen, so gilt für dieses Intervall $\sqrt{3}\,p' < z < \sqrt{3}\,p''$

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \frac{2}{m}(\sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1 + \sigma_1\sigma_2) + \lambda\sigma_0(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \sigma_0^2 \quad . \quad (23)$$

und nach Ausführung der oben angegebenen Hauptachsentransformation

$$\frac{\left(\frac{x}{\sigma_0}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sigma_0}\right)^2}{\frac{m}{m+1}\left\{1 + \frac{3\lambda^2}{4}\frac{m}{m-2}\right\}} + \frac{\left\{\frac{z}{\sigma_0} + \frac{\lambda\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{m}{m-2}\right\}^2}{\frac{m}{m-2}\left\{1 + \frac{3\lambda^2}{4}\cdot\frac{m}{m-2}\right\}} = +1 \quad . \quad . \quad . \quad (24),$$

d. h. die Grenzfläche ist auch für diesen Fall ein Rotationsellipsoid. Gilt das parabolische Gesetz (22) für das ganze Gebiet p, so erhält man mit $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = p$ schließlich noch

$$p^{\max}_{\min} = \sigma_0 \cdot \frac{\lambda}{2}\frac{m}{m-2}\left\{-1 \pm \sqrt{1 + \frac{4}{3\lambda^2}\cdot\frac{m-2}{m}}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25).$$

13. Anwendung auf Marmor und Zink. Das lineare Gesetz (16) gilt für Marmor innerhalb sehr weiter Grenzen. Man kann dafür nach Abb. 2 in runden Zahlen setzen (alle Spannungen in kg/cm²)

$$\sigma_e = 1000 - 1{,}15\,p = 1000 - 0{,}383\,(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3),$$

solange $-1000 > p > (-5000)$ ist. Die Gleichung der Grenzfläche ergibt sich für dieses Intervall damit zu

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 0{,}931\,(\sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1 + \sigma_1\sigma_2) + 898\,(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = 1\,170\,000 \quad (17)_M,$$

bzw. zu

$$\frac{\left(\frac{x}{1000}\right)^2 + \left(\frac{y}{1000}\right)^2}{2{,}60^2} + \frac{\left(\frac{z}{1000} + 11{,}23\right)^2}{12{,}0^2} = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)_M.$$

Nach Gl. (20) und (21) erhält man mit $a = 0{,}059$

$$z_0 = -11{,}23\,\sigma_0 \quad \text{und} \quad p^{\max}_{\min} = \begin{cases} (+423) \\ -13\,400 \end{cases} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)_M.$$

Das Ellipsoid $(18)_M$ kann man wohl für alle Werte $p < -1000$ kg/cm² als Grenzfläche zugrunde legen. Dagegen tritt für Werte $p > -1000$ eine merkliche Krümmung der Kurve $\sigma_e(p)$ ein, wie man leicht erkennt, wenn man die Punkte für reine Schubbeanspruchung $p = 0$, $\sigma_e = 280$ und einachsigen Zug $p = +20$, $\sigma_e \approx 60$ betrachtet. Der letztere Wert ist, da er für das v. Kármán und Böker verwendete Material nicht mitgeteilt ist, an Hand der v. Bachschen Festigkeitsversuche extrapoliert.

Mit den Werten für $p = 0$ und $p = +20$ erhält man für $p > -1000$ näherungsweise

$$\sigma_e^2 = 280^2 \left\{ 1 - 4{,}46\,\frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{280} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22)_M$$

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 0{,}50\,(\sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1 + \sigma_1\sigma_2) + 1250\,(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = 78\,400 \quad (23)_M,$$

$$\frac{\left(\frac{x}{280}\right)^2 + \left(\frac{y}{280}\right)^2}{4{,}96^2} + \frac{\left(\frac{z}{280} + 7{,}73\right)^2}{7{,}85^2} = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)_M.$$

Es ist sehr interessant, die Vergleichsspannungen σ_e für ein-, zwei- und dreiachsigen Zug bzw. Druck (letztere extrapoliert) nebeneinander zu stellen und zu vergleichen.

	Zug			Druck		
I.	$\sigma_1 = \sigma_2 = 0;\ \sigma_3 = +60$	mit	$\sigma_e = 60$	$\sigma_3 = -1310$	mit	$\sigma_e = 1310$
II.	$\sigma_1 = 0;\ \sigma_2 = \sigma_3 = +30$	»	~ 60	$\sigma_2 = \sigma_3 = -2180$	»	$\sigma_e = 2670$
III.	$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = +20$	»	~ 60	$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = -13\,400$	»	$\sigma_e = 16\,400$
	Torsion			$p = 0$	»	$\sigma_e = 280$

Diese Werte sind in Abb. 11a und 11b eingezeichnet.

Bei Zink liegen die Verhältnisse ganz ähnlich. Nach Abb. 7 ist für $-1000 > p < (-4000)$

$$\sigma_e = 950 - {}^1/_3\,(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3),$$

so daß man erhält

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 0{,}812\,(\sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1 + \sigma_1\sigma_2) + 712\,(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = 1013000 \quad (17)_Z,$$

$$\frac{\left(\frac{x}{950}\right)^2 + \left(\frac{y}{950}\right)^2}{1{,}54^2} + \frac{\left(\frac{z}{950} + 3{,}47\right)^2}{4{,}23^2} = 1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (18)_Z,$$

$$p_{\substack{\max\\\min}} = \begin{cases} (+425) \\ -4220 \end{cases} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (21)_Z.$$

Die zugehörigen Zahlen für $p > -1000$ liegen nicht vor.

14. Schlußbemerkungen. Nach unserer Hypothese ist im allgemeinen für $p > p_{\max}$ bzw. $p < p_{\min}$ kein Spannungszustand mit rein elastischen Verzerrungen möglich. Für das Intervall $p_{\min} > p < p_{\max}$ sind die Verzerrungen nur dann elastischer Art, wenn noch die Bedingung $\sqrt{2EA} < \sigma_e(p)$ erfüllt ist. Die p, σ_e-Ebene zerfällt somit in einen ersten Bereich der elastischen Verzerrungszustände und in einen zweiten Bereich der unelastischen Formänderungen. Die Abb. 11a und 11b zeigen diese beiden Gebiete für Marmor nach den Versuchen von v. Kármán und Böker. Das schraffierte Gebiet entspricht den tatsächlichen Verhältnissen, während die gestrichelt gezeichnete Gerade als Begrenzung dieses Gebietes erhalten wird, wenn man das lineare Gesetz für $\sigma_e(p)$ im ganzen Intervall von p zugrunde legt, was aber nach Abb. 11a und 11b für die Werte $p > -1000$ kg/cm² beträchtliche Fehler zur Folge hätte.

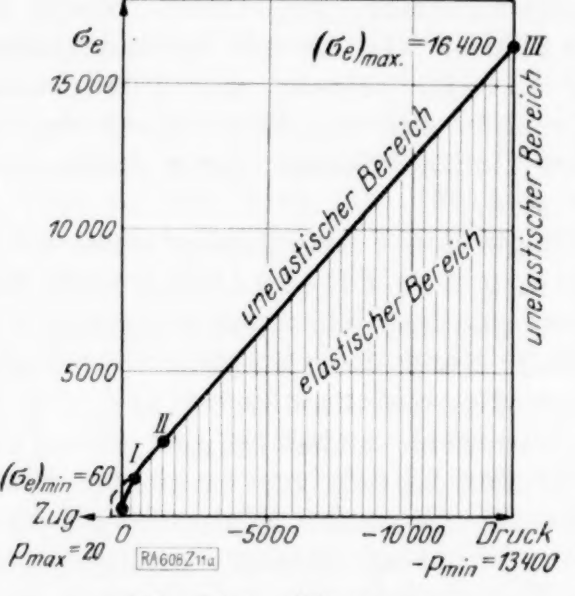


Abb. 11a. Marmor.

I: Einachsiger Spannungszustand. $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$; $\sigma_3 = \sigma_e$.
II: Zweiachsiger Spannungszustand $\sigma_1 = 0$; $\sigma_2 = \sigma_3$.
III: Dreiachsiger Spannungszustand $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$.

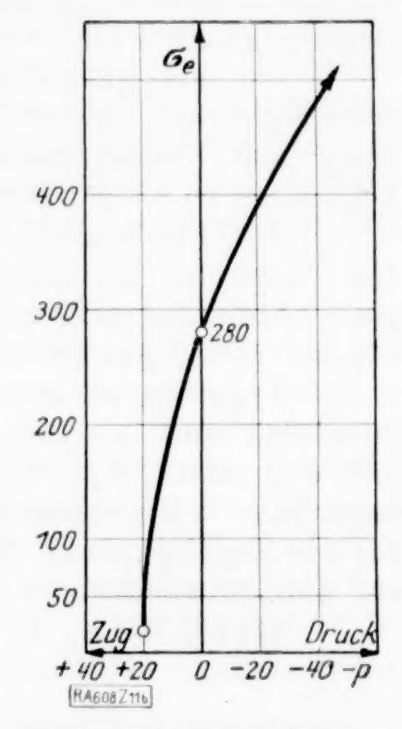


Abb. 11b. Einzelheit zu Abb. 11a. (p im $2^1/_2$ fachen Maßstab von σ_e)

Handelt es sich darum, für einen bestimmten Stoff einen ersten Ueberblick über den Verlauf der Funktion $\sigma_e(p)$ zu erhalten, so werden dafür in vielen Fällen schon die drei Punkte genügen, die durch die reine Zugfestigkeit (Z), Druckfestigkeit (D) und die Verdrehungsfestigkeit (T) bestimmt sind. So ist z. B. in Abb. 12 der vermutliche Verlauf der Funktion $\sigma_e(p)$ für Eisen skizzenhaft aufgezeichnet[31]).

Zu der Beanspruchung durch allseitigen gleichen Druck $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = p_{\min}$ ist zu bemerken, daß ein unmittelbarer Anlaß zum Eintreten endlicher bleibender Verzerrungen i. a. nicht vorhanden ist. Dieser Spannungszustand ist nach der neuen Hypothese trotzdem als kritischer Zustand aufzufassen, da schon sehr kleine Differenzen zwischen den Hauptspannungen (sehr kleine Schubspannungen), die man als kleine »Uebergewichte«

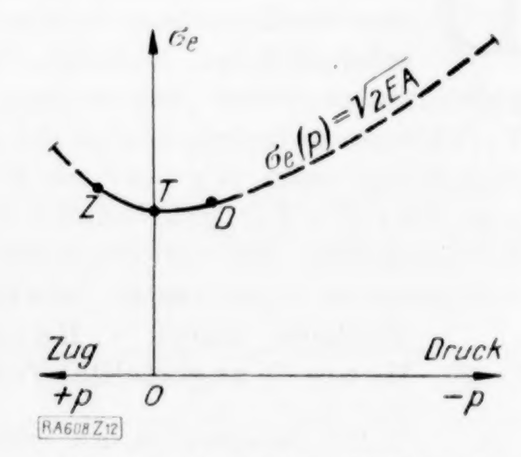


Abb. 12. Ungefährer Verlauf der Funktion $\sigma_e(p)$ für Eisen.

[31]) Die Vermutung liegt nahe, Abb. 11a und 11b als typisch für spröde Stoffe von kleiner Zugfestigkeit und Abb. 12 als den Typus für dehnbare Metalle anzusprechen. Bei dehnbaren Metallen wird es sich für den praktischen Gebrauch empfehlen, solange keine diesbezüglichen Versuche vorliegen, $\sigma_e(p) =$ konst. $= \sigma_e(0) = \sigma_0$ zu setzen, wobei man dann vermutlich auf der sicheren Seite bleibt. Für spröde Materialien (insbesondere bei Steinen, Beton u. dergl.) mit »geringer Zugfestigkeit« ist diese Vereinfachung nicht zulässig, da die Vergleichsspannungen im Zuggebiet $p > 0$ i. a. sehr viel kleiner sind als σ_0. Man vergleiche hierzu Abb. 11a und 11b.

bezeichnen könnte, ein Fließen zur Folge haben. Auch tritt nach unserer Auffassung für $p < p_{\min}$ eine bleibende Materialverdichtung ein, die man zu den plastischen Deformationen zählen kann, wenn sie auch i. a. keine endlichen Verzerrungen zur Folge hat. Bildlich könnte man vielleicht sagen, der kritische Spannungszustand $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = p_{\min}$ hat ein »flüssig- bzw. plastischwerden« des Baustoffes zur Folge, so daß er sich gegenüber neu hinzukommenden Spannungen wie eine zähe Flüssigkeit verhält.

15. Zusammenfassung. Die vorgeschlagene neue Hypothese der Energiegrenze der Elastizität gibt die bisher vorliegenden Versuchsergebnisse besser wieder als die Mohrsche Schubspannungshypothese. Auch in jenen Fällen, wo sich die Mohrsche Hypothese als ungültig erweist, insofern sich ein Einfluß der Höhe der mittleren Hauptspannung zeigt, ergeben sich für die $\sigma_e(p)$-Hypothese bei bester Uebereinstimmung keinerlei Schwierigkeiten.

Der neuen Hypothese sind alle Vorzüge des Beltramischen Vorschlags (Nr. 6) eigen. Ein besonderer Vorzug ist es, daß die Schwierigkeiten bei Baustoffen mit verschiedenen Fließgrenzspannungen für einachsigen Zug und einachsigen Druck, die bei den älteren Hypothesen auftreten, wegfallen, da sich der Uebergang zwischen beiden Größen ganz von selbst und stetig mit veränderlichem p vollzieht.

Ob bei größerer Ueberschreitung der Fließgrenze ein Trennungsbruch oder ein Gleitungsbruch eintritt, scheint für die Anwendung der neuen Hypothese auf die Berechnung der Fließgrenzvergleichsspannung ganz bedeutungslos zu sein und eine Bruchhypothese will sie nicht sein.

Die bis heute vorliegenden Versuchsergebnisse reichen zur endgiltigen Entscheidung der Frage der Beurteilung der Fließgefahr noch nicht ganz aus, so daß noch eine große Zahl schwieriger und genauer Versuche nötig sein werden, bis die oben angedeuteten Fragen völlig geklärt sind. Nach dem schon früher Gesagten scheiden die $_{\max}|\sigma|$, $_{\max}|\varepsilon|$, $_{\max}|\tau|$-Hypothesen, ferner die Beltramische und die Hubersche Hypothese für einen Vergleich aus, so daß nur noch zwischen der Sandelschen Schubspannungshypothese und der neuen Hypothese der Energiegrenze der Elastizität zu entscheiden ist. Doch kann man wohl schon heute mit großer Wahrscheinlichkeit behaupten, daß die Hypothese der Energiegrenze der Elastizität den Vorzug verdient, wobei ihre große Einfachheit bei den Anwendungen (Plastizitätstheorie!) ganz besonders ins Gewicht fällt.

Karlsruhe, 16. 7. 1925. 608

Versuche über die ebene Biegung gekrümmter Stäbe.

Von **RUDOLF MAYER** in Mannheim.

Die nachstehend kurz beschriebenen Versuche [1]) wurden im Mechanischen Laboratorium der Technischen Hochschule Karlsruhe ausgeführt. Sie sollten ein Urteil darüber ermöglichen, welcher Grad von Genauigkeit den üblichen Berechnungsmethoden gekrümmter Stäbe innewohnt; insbesondere sollte festgestellt werden, bis zu welchem Verhältnis zwischen Stabdicke und Krümmungshalbmesser die für gerade Stäbe zutreffende Näherung nach Navier noch praktisch brauchbare Ergebnisse liefert und wie sich die von Résal [2]) für gekrümmte Stäbe aufgestellte Näherungsrechnung, welche eine von der Schwerachse des Querschnitts gegen den Krümmungsmittelpunkt hin verlegte neutrale Faserschicht voraussetzt, bewährt.

Frühere, durch v. Bach [3]), O. Hoenigsberger [4]) und C. A. Goodenough und L. E. Moore [5]) angestellte Versuche hatten zwar bereits ergeben, daß die Navierschen

[1]) Die Anregung zu den Versuchen verdanke ich Hrn. Geh. Hofrat Prof. Dr. Ing. e. h. E. Brauer, nach dessen Angaben auch das später beschriebene Meßgerät zur Messung der Formänderungen gebaut wurde.

[2]) H. Résal, Formules pour le calcul de la résistance des chaines à mailles plats, Annales des mines 1862, p. 617 ff. Die dort entwickelte Theorie findet sich im deutschen Schrifttum, lediglich mit anderer Bezeichnungsweise, erstmals bei Grashof, Elastizität und Festigkeit, Berlin 1878, S. 251 ff. Durch Einführung des Nullradius (Krümmungshalbmesser der neutralen Schicht) erfuhr sie eine sehr zweckmäßige Umgestaltung, bei der die Querschnittsdrehung nur vom Biegungsmoment und die Stabverkürzung nur von der Normalkraft abhängig ist; vergl. hierzu R. Bredt, Z. d. Ver. d. Ing. 1895, S. 1054.

[3]) Elastizität und Festigkeit, 8. Auflage, 5. Abschnitt.

[4]) Zeitschr. d. österr. Arch.- u. Ingenieurvereins S. 1906, S. 489.

[5]) Z. d. Ver. d. Ing. 1906, S. 1100.

Formeln bei gekrümmten Stäben von gedrungener Form zu unrichtigen Ergebnissen führen, sie ergaben jedoch noch keinen sicheren Anhalt dafür, in welchem Verhältnis etwa bei sonst gleicher Stabform der Fehler der Navierschen Theorie mit der Stabdicke sich ändert; auch schien nach diesen Versuchen die Résalsche Theorie zwar mit kleineren aber doch noch nicht gerade als geringfügig anzusprechenden Fehlern behaftet zu sein.

Den von mir angestellten Versuchen lag der Gedanke zugrunde, verschieden dicke Ringe aus möglichst gleichartigem Material einer Biegeprobe zu unterwerfen und dabei durch Messung der Formänderungen diejenige Belastung möglichst scharf zu ermitteln, bei der Belastung und Dehnung aufhören, proportional zu sein. Dieser Belastung, welche ich in der Folge die »Grenzlast« nenne, entsprechen offenbar in den am stärksten beanspruchten Fasern eines Ringes Spannungen, welche der Proportionalitätsgrenze σ_p des Versuchsmaterials gleichkommen. Es war anzunehmen, daß für den dünnsten Ring die Berechnung nach Navier und Résal noch am ehesten mit guter Näherung angewandt werden dürfe, und es konnte hiernach aus dem mit diesem Ring angestellten Versuch der Wert von σ_p nach beiden Theorien berechnet werden, wobei die ziemlich gute Uebereinstimmung dieser Werte miteinander ($\sigma_p' = 4122{,}25$ kg/cm² nach Navier und $\sigma_p'' = 4268{,}93$ kg/cm² nach Résal) nachträglich ein Urteil über die Berechtigung zu der vorerwähnten Versuchshypothese ermöglichte. Machte man ferner noch die Annahme, zu der die Herstellung aller Versuchskörper aus ein und demselben Material berechtigte, daß auch die dickeren Ringe eine Proportionalitätsgrenze hatten, welche mit der des dünnsten Ringes übereinstimmte, so konnte man die für sie theoretisch erforderlichen Grenzlasten errechnen und aus ihrem Vergleich mit den Grenzlasten der Versuche über die Güte der Theorien Aufschluß gewinnen.

Eine weitere Möglichkeit zur Beurteilung der Näherungstheorien ergab sich aus dem Vergleich, der bei einer Belastung, welche natürlich die Grenzlast nicht überschreiten durfte, gemessenen Formänderung eines Ringes mit derjenigen, welche dieser Ring bei gleicher Belastung nach Navier und nach Résal erfahren sollte. Die Berechnung dieser Formänderungen verlangt die Kenntnis des Elastizitätsmoduls E und die des Gleitmoduls G des Materials. Der Modul E wurde aus der Formänderung des dünnsten Ringes berechnet, und es erwies sich auch hierbei an der guten Uebereinstimmung der berechneten Werte ($E' = 1\,926\,141$ kg/cm² nach Navier und $E'' = 1\,924\,029$ kg/cm² nach Résal) die Berechtigung der bereits erwähnten Versuchshypothese. Mit Rücksicht auf den an und für sich geringfügigen Einfluß der Schubdeformation auf die gesamte Formänderung genügte es, den Wert des Gleitmoduls aus E vermöge der Beziehung $G = \frac{m}{2(m+1)} \cdot E$ mit $m = 10/3$ abzuleiten.

Da es übrigens sehr wohl denkbar ist, daß merklich verschiedene Annahmen über die Spannungsverteilung beim gebogenen Stab zu merklich gleichen rechnerischen Formänderungen führen, so hat von vornherein die Prüfung der Theorien durch Vergleich der Grenzbelastungen eine größere Bedeutung als die mittels Vergleichs der Formänderungen; die Uebereinstimmung hinsichtlich der Formänderungen ist ein notwendiges aber kein hinreichendes Kennzeichen für die Richtigkeit einer Spannungshypothese.

Die Versuchseinrichtung. Als Versuchskörper dienten 7 Ringe, mit *A* bis *G* bezeichnet, von den aus Zahlentafel 1 ersichtlichen Abmessungen. Alle Ringe waren

Zahlentafel 1.[1])

Ring	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*
r_a	9,0	9,0	9,0	9,0	9,0	9,0	9,0
r_i	8,1	7,2	6,27	5,38	4,51	3,59	2,7
r_s	8,55	8,1	7,635	7,19	6,755	6,295	5,85
b	4,69	4,68	4,67	4,68	4,68	4,68	4,68
a	10,55	10,55	35,00	35,00	35,00	35,00	35,00
F	4,2210	8,4240	12,7491	16,9416	21,0132	25,3188	29,4840
J	0,284 917	2,27 448	7,91 815	18,50 079	35,30 235	61,75 276	97,51 833
r_0	8,542 09907	8,066 556	7,552 950	7,035 463	6,498 512	5,886 371	5,232 677
e	0,007 90093	0,033 444	0,082 050	0,154 537	0,256 488	0,408 629	0,617 323

[1]) Bedeutung der Bezeichnungen siehe S. 219.

aus einem Stück einer abgebrauchten, stählernen Lokomotivachse von 200 mm Durchmesser auf der Drehbank durch kalte Bearbeitung mit 180 mm Außendurchmesser hergestellt. Die Stahlachse entstammte der Eisenbahnhauptwerkstätte Karlsruhe. In der aus den Abb. 1 und 2 ersichtlichen Weise wurden die Ringe in einer Festigkeitsmaschine von Amsler-Laffon einem Druck in Richtung ihrer vertikalen Durchmesser ausgesetzt. Die Druckübertragung geschah durch oben und unten mittels seitlicher Druckschrauben an den Ringen befestigte U-förmige Bügel, die sich mit ihren gehobelten Innenseiten tangential gegen die Ringe und mit den als flache Schneiden ausgebildeten Außenseiten gegen die Druckplatten der Festigkeitsmaschine legten. Letztere gestattete die Ausübung von Druckkräften bis zu 700 kg mit 0,5 kg Meßgenauigkeit bei kleiner und bis zu 30 000 kg mit 30 kg Meßgenauigkeit bei großer Uebersetzung.

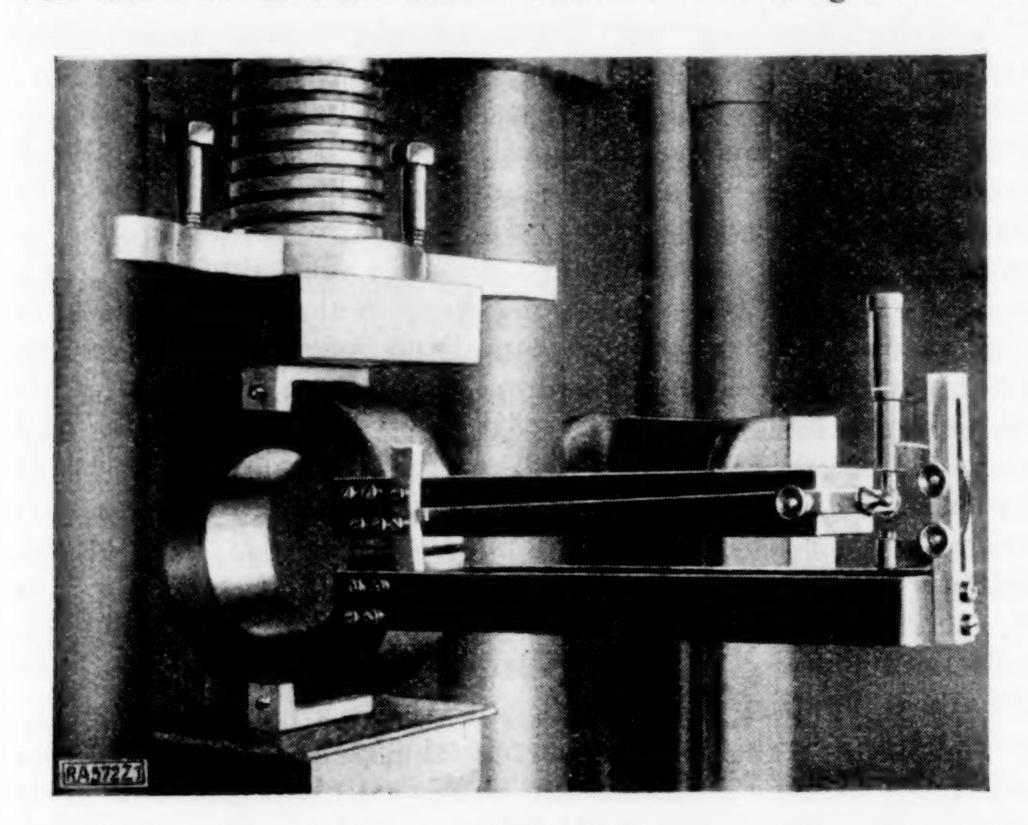


Abb. 1.

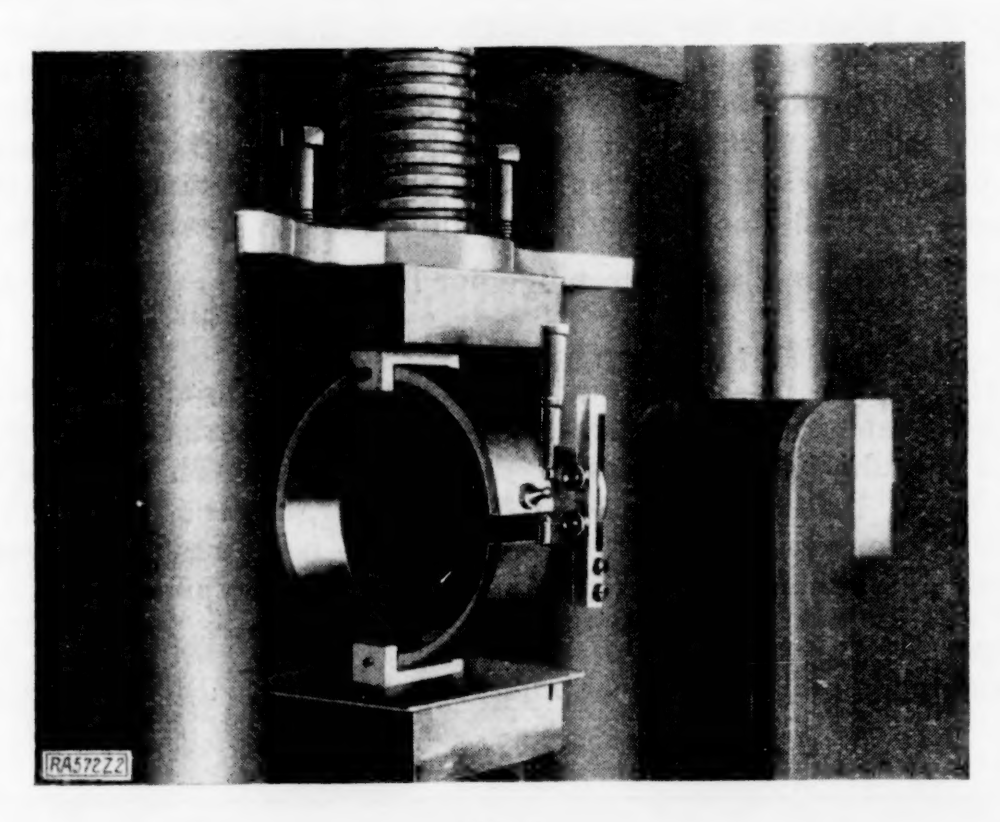


Abb. 2.

An dem einen Ende des horizontalen Durchmessers waren die Ringe durch eine Fuge geöffnet; mit den hier klaffenden Ringenden waren, Abb. 3, zwei Arme a und b fest verschraubt, deren gegenseitige Annäherung an den freien Enden durch eine Mikrometerschraube gemessen werden konnte. Die Mikrometerschraube war in der Haltevorrichtung c des Armes b so eingeklemmt, daß ihre Spindel senkrecht über dem kugelförmigen Ende des Zäpfchens d stand. Dieses Zäpfchen bildete den kurzen Arm eines um die Spitzen e drehbaren Zeigers, dessen langer Arm gegenüber einer am Bügel a befestigten Skala f spielte Die beschriebene Meßeinrichtung für die Formänderungen hatte eine Meßgenauigkeit von $^1/_{2000}$ mm und wurde für die Ringe B bis G verwendet, deren Schnittfuge je 10 mm breit war. Bei den Ringen A und B, deren Schnittfugen 15 bzw. 10 mm breit waren, genügte es, die Mikrometerschraube in unmittelbarer Nähe der Schnittfuge nach Abb. 2 zu befestigen; bei dieser Anordnung betrug die Meßgenauigkeit für die Formänderungen $^1/_{200}$ mm. Der wagerecht gemessene Abstand der Mikrometerspindel vom Ringmittelpunkt betrug bei den Ringen A und B je 10,55 cm, bei den Ringen C bis G je 35 cm.

Um den Einfluß des Eigengewichtes der Ringe und der Meßvorrichtung auf die Formänderungen auszuschalten, wurden die Nullablesungen des Mikrometers bei lotrechter Lage der Ringe und nach Befestigung des Meßgerätes an ihnen vorgenommen.

Abb. 4 gibt eine zeichnerische Darstellung der Versuchsbeobachtungen für die verschiedenen Ringe[1]). Hierin bedeutet

P die von der Maschine ausgeübte Druckkraft in kg,

Δ die lotrechte Verschiebung des Zäpfchens d unter der Mikrometerspindel infolge der Verformung des Ringes in cm,

P_G und Δ_G die entsprechenden Werte für die Grenzlast.

Vermöge der weitgehenden Genauigkeit des verwendeten Meßgerätes konnten die Grenzwerte P_G und Δ_G in dem Schaubild der Abb. 4 mit hinlänglicher Schärfe festgestellt werden.

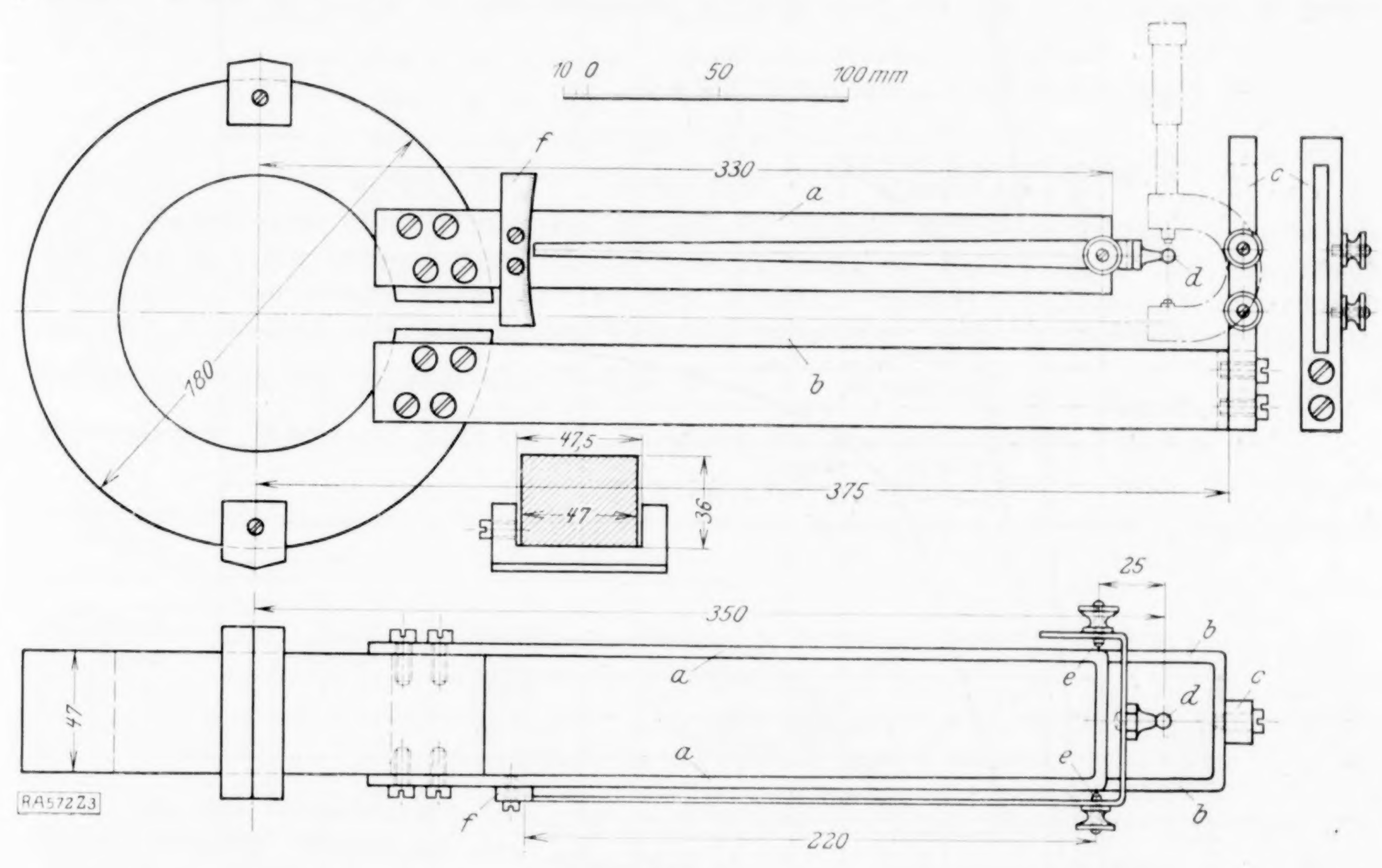


Abb. 3.

Auswertung der Versuche. Bezeichnet man mit

P (kg) die von der Maschine ausgeübte Druckkraft,

P_G (kg) denjenigen Wert von P, der als Grenzlast in einem Ring die Spannung σ_p an der Proportionalitätsgrenze in den am stärksten beanspruchten Fasern hervorruft,

P_G' (kg) die theoretische Grenzlast nach Navier,

P_G'' (kg) » » » » Résal,

F (cm²), J (cm⁴) die Fläche bzw. das Trägheitsmoment des Ringquerschnitts,

E, G (kg/cm²) den Elastizitäts- bzw. Gleitmodul des Materials,

r_a, r_i, r_s (cm) den äußeren, inneren bzw. Schwerpunktshalbmesser eines Ringes,

r_0 (cm) den Nullradius nach Bredt[2]), d. h. den Abstand der neutralen Schicht vom Krümmungsmittelpunkt,

$e = r_s - r_0$ die Exzentrizität der neutralen Schicht,

b (cm) die Ringbreite,

a (cm) den Achsabstand der Mikrometerspindel vom Ringmittelpunkt,

Δ (cm) die lotrechte Verschiebung bei der Last P, gemessen in der Achse der Mikrometerspindel, und

Δ' bzw. Δ'' (cm) die der Theorie von Navier bzw. Résal entsprechenden Werte von Δ,

so gelten folgende Beziehungen:

[1]) Den eingehenden Versuchsbericht enthält meine Veröffentlichung in der Festschrift zur Hundertjahrfeier der Karlsruher Technischen Hochschule, 1925.

[2]) Definiert durch die Beziehung $r_0 = F : \int_{r_i}^{r_a} \frac{dF}{r}$.

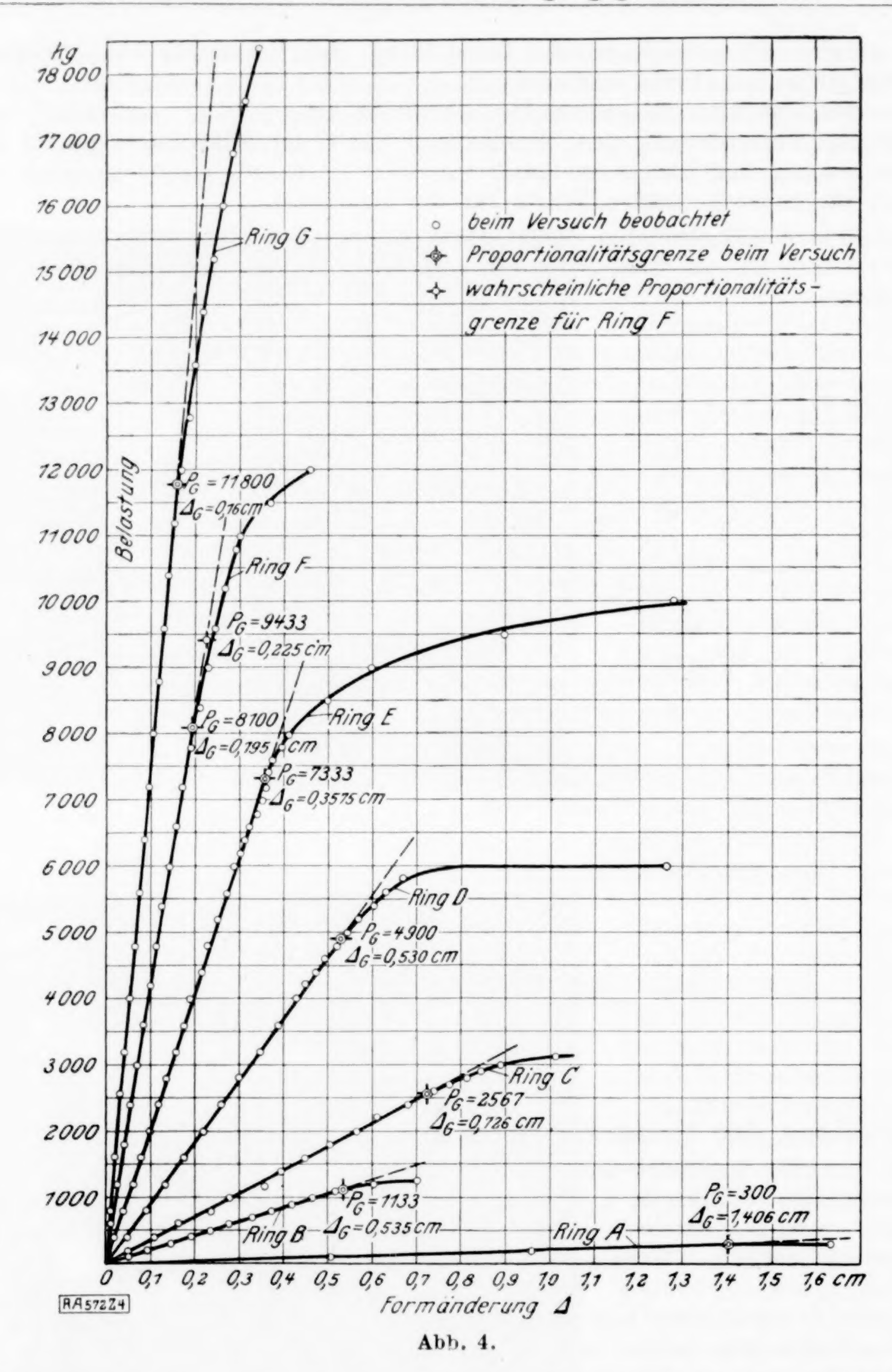


Abb. 4.

A. Spannungen. Nach Navier ist für die am stärksten gedrückten, inneren Fasern im gefährlichen Schnitt

$$\sigma_p' = \frac{P_G'}{F} + \frac{P_G' \cdot r_s \cdot (r_s - r_i)}{J} \quad \text{(1).}$$

Führt man hierin noch $J = F \cdot \frac{(r_s - r_i)^2}{3}$ ein, so erhält man

$$\sigma_p' = \frac{P_G'}{F} \cdot \frac{4\, r_s - r_i}{r_s - r_i} \quad \text{(2)}$$

und hieraus

$$P_G' = F \cdot \sigma_p' \cdot \frac{r_s - r_i}{4\, r_s - r_i} \quad \text{(3).}$$

Nach Résal gilt für dieselben Fasern [1])

$$\sigma_p'' = \frac{P_G''}{F} \cdot \frac{r_0}{r_i} + \frac{P_G''}{F} \cdot \frac{r_0}{e} \cdot \left(\frac{r_0}{r_i} - 1\right) = \frac{P_G''}{F} \cdot \frac{r_0}{r_i} \left(1 - \frac{r_0}{e} - \frac{r_i}{e}\right) = \frac{P_G''}{F} \cdot \frac{r_0}{r_i} \cdot \frac{e + r_0 - r_i}{e} \quad \text{(4).}$$

[1]) Vergl. E. Brauer, Festigkeitslehre, S. 155 ff.

Ersetzt man hierin noch im Zähler e durch $r_s - r_0$, so erhält man die für die zahlenmäßige Berechnung zweckmäßige Gleichung

$$\sigma_p'' = \frac{P_G''}{F} \cdot \frac{r_0}{r_i} \cdot \frac{r_s - r_i}{e} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (5),$$

woraus

$$P_G'' = F \cdot \sigma_p'' \cdot \frac{r_i}{r_0} \cdot \frac{e}{r_s - r_i} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (6)$$

Für den dünnsten Ring A betrug die Grenzlast 300 kg. Unter Berücksichtigung der in Zahlentafel 1 angeführten Ringabmessungen erhält man für diese Grenzlast des Ringes A als Spannung an der Proportionalitätsgrenze aus den Gleichungen (2) bzw. (5) die Werte

$$\sigma_p' = \frac{300}{4,221} \cdot \frac{4 \cdot 8,55 - 8,1}{8,55 - 8,1} = 4122,25 \text{ kg/cm}^2 \text{ nach Navier und}$$

$$\sigma_p'' = \frac{300}{4,221} \cdot \frac{8,542\ 099}{8,1} \cdot \frac{8,55 - 8,1}{0,007\ 9009} = 4268,93 \text{ kg/cm}^2 \text{ nach Résal.}$$

Führt man diese Werte für σ_p' und σ_p'' sowie die in Zahlentafel 1 enthaltenen Abmessungen der Ringe in die Gl. (3) bzw. (6) ein, so liefern diese die theoretischen Grenzlasten der Ringe nach Navier bzw. Résal, welche in Zahlentafel 2 zusammen mit den wirklichen Grenzlasten der Versuche aufgeführt sind. Diese Zahlentafel enthält außerdem noch die prozentualen Fehler $F' = \frac{P_G' - P_G}{P_G} \cdot 100$ bzw. $F'' = \frac{P_G'' - P_G}{P_G} \cdot 100$ der theoretischen Werte P_G' und P_G'' im Vergleich zu den beobachteten Werten P_G.

Zahlentafel 2.

Ring	A	B	C	D	E	F	G
P_G' (Navier) .	(300)	1240,2	2955,8	5406,6	8639,0	13 076	18 495
P_G'' (Résal) . .	(300)	1192,77	2715,78	4721,68	7112,58	9 957,98	12 757,64
P_G (Versuch) .	(300)	1133	2567	4900	7333	8 100	11 800
F' . . (vH)	—	+ 9,47	+ 15,13	+ 10,34	+ 17,8	+ 61,4	+ 56,7
F'' . . (vH)	—	+ 5,27	+ 5,79	— 3,64	— 3,06	+ 22,94	+ 8,11

An der vorstehenden Zusammenstellung überrascht der große Fehler für die theoretischen Grenzlasten bei Ring F. Offenbar ist aber für diesen Ring, wie auch Abb. 4 erkennen läßt, der beobachtete Wert von 8100 kg für P_G zu klein. Dem an diesem Ring durchgeführten Versuch zu mißtrauen, liegt kein Anlaß vor; wahrscheinlich ist das außergewöhnliche Verhalten dieses Ringes aus einer zufällig anderen Materialbeschaffenheit zu erklären. Um den wahrscheinlichen Wert von P_G zu bestimmen, der sich bei gleicher Materialbeschaffenheit für Ring F ergeben hätte, wurden die bei den Grenzlasten gemessenen Formänderungen der Ringe C, D, E und G in Abb. 5 über den zugehörigen Ringquerschnitten aufgetragen und durch eine Kurve verbunden; die Ringe A und B konnten bei dieser Darstellung nicht verwendet werden, weil ihre Formänderungen an anderer Stelle gemessen wurden. Aus Abb. 5 liest man für Ring F als wahrscheinliche Formänderung bei der Grenzlast der Wert $\Delta = 0,225$ cm ab, zu dem nach Abb. 4 der Wert $P_G = 9433$ kg als wahrscheinliche Grenzlast dieses Ringes sich ergibt.

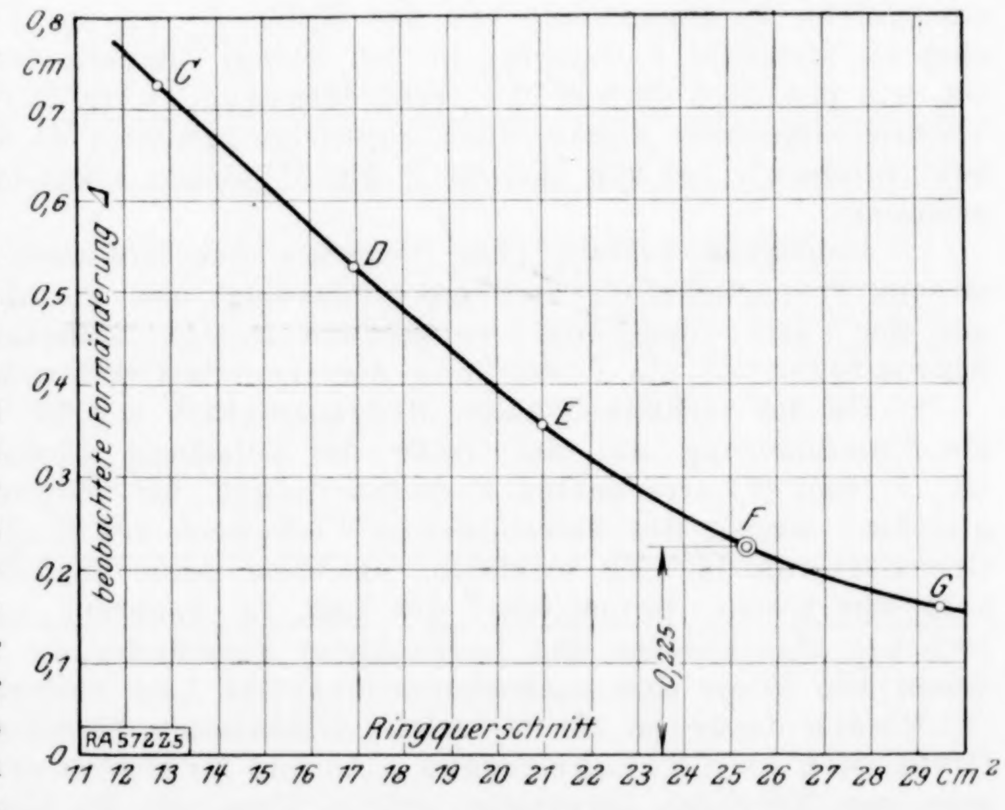


Abb. 5.

Unter Zugrundelegung dieser Grenzlast wird der wahrscheinliche Fehler nach Navier $\frac{13076-9433}{9433} \cdot 100 = 38{,}5$ vH und nach Résal $\frac{9957{,}98-9433}{9433} \cdot 100 = 5{,}57$ vH, Fehlergrößen, die sich in die Fehlerreihe der Zahlentafel gut einfügen.

Für die Ringe B bis G beträgt der mittlere Fehler der theoretischen Grenzlasten

	entprechend Zahlentafel 2	unter Benutzung der wahrscheinlichen Grenzlast für Ring F und der beobachteten Grenzlasten der übrigen Ringe
nach Navier	+ 28,5 vH	+ 24,66 vH
» Résal	+ 5,9 »	+ 3,0 »

B. Formänderungen. Mit den früher angeführten Bezeichnungen berechnet sich [1]) die an der Meßstelle zu erwartende lotrechte Verschiebung unter der Last P zu

$$\varDelta' = -\frac{2\,P a}{E F} + \frac{39\,\pi}{25} \cdot \frac{P r_s}{E J} + \frac{P r_s^2}{E F} \cdot \left(\frac{\pi}{2}\,r_s + 2\,a\right) + \frac{P^2 r_s^4}{E^2 J^2} \cdot \left(\frac{\pi}{4}\,a + {}^2/_3\,r_s\right) \quad . \quad (7)$$

nach Navier und

$$\varDelta'' = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{P r_0}{E F} + \frac{13\,\pi}{20} \cdot \frac{P r_0}{E F e} \cdot \left(3\,r_s - \frac{h^2}{e}\right) + \frac{P r_0}{E F e} \cdot \left(\frac{\pi}{2}\,r_0 + 2\,a\right) + \frac{P^2 r_0^2}{E^2 F^2 e^2} \cdot \left(\frac{\pi}{4}\,a + {}^2/_3\,r_0\right) \quad (8)$$

nach Résal, wobei abkürzend $h = \frac{r_a - r_i}{2}$ die halbe Ringdicke bezeichnet.

In den Gleichungen (7) und (8) bedeuten die auf den rechten Seiten stehenden Summanden der Reihe nach diejenigen Anteile an der gesamten Formänderung, welche durch die in den Ringquerschnitten bei der Last P herrschenden Normalkräfte, Querkräfte, Biegungsmomente 1. und 2. Ordnung entstehen. Unter Biegungsmomenten 1 Ordnung sind die Momente der Last P zu verstehen, bei deren Berechnung die planmäßigen Hebelarme zugrunde gelegt werden; da indessen die auf Biegung beanspruchte Ringhälfte beim Versuch ihre Form nicht wahrt, sondern geringe elastische Verschiebungen $\varDelta x$ auch im wagerechten Sinne erfährt, so tritt eine Vergrößerung der Hebelarme von P ein, welche Zusatzmomente von der Größe $P \cdot \varDelta x$ zur Folge hat. Diese Zusatzmomente sind als Momente 2. Ordnung in den letzten Gliedern der Gl. (7) und (8) berücksichtigt; sie, wie praktisch üblich, zu vernachlässigen, wäre hier, wo eine scharfe Kontrolle der Theorie angestrebt wurde, nicht angezeigt gewesen, da die Meßgenauigkeit beim Versuch zum mindesten bei den Ringen A bis D diesen sekundären Einfluß noch nachzuweisen gestattete.

Uebrigens besteht eben vermöge des Einflusses der Momente 2. Ordnung keine strenge Proportionalität zwischen Belastung und Formänderung, doch überwiegen die mit der Last proportional wachsenden Anteile immerhin so sehr, daß hieraus keine Schwierigkeit für die Feststellung der Grenzlast entstand.

Da die verhältnismäßige Meßgenauigkeit sowohl für die Belastung als auch für die Formänderung mit der Größe der Belastung wächst, ist es zweckmäßig, die aus Gl. (7) und (8) errechneten Formänderungen bei möglichst hohen Belastungen zu vergleichen; wegen des abweichenden Verhaltens des Ringes F, der seine wahrscheinliche Grenzlast von 9433 kg erreichte, nachdem seine Formänderungen bereits bei 8100 kg aufgehört hatten, proportional der Last zu wachsen, war es notwendig, den Vergleich zwischen theoretischer und beobachteter Formänderung bei Belastungen anzustellen, bei denen alle Ringe sich noch proportional der Last verformten. Die Gleichungen (7) und (8) wurden deswegen für für solche Grenzlasten berechnet, die $^{70}/_{100}$ der theoretischen Grenzlasten nach Résal betrugen. An und für sich ist es ja belanglos, welche Belastungen man zum Vergleich heranzieht, wofern diese nur die Grenzlasten nicht überschreiten.

Da in den Gleichungen (7) und (8) der Gleitmodul G bereits durch den Wert $G = \frac{m}{2\,(m+1)} \cdot E$ oder, mit $m = {}^{10}/_3$, $G = {}^5/_{13}\,E$ ersetzt wurde, so bleibt nur noch E zu bestimmen. Für den dünnsten Ring A war bei der Grenzlast $P_G = 300$ kg die Form-

[1]) Die Herleitung der Gleichungen (7) und (8) enthält mein ausführlicher Versuchsbericht in der Festschrift der Technischen Hochschule Karlsruhe, 1925.

änderung $\Delta_G = 1{,}403$ cm gemessen worden; unter Berücksichtigung der in Zahlentafel 1 angegebenen Abmessungen dieses Ringes ergeben sich aus den Gleichungen (7) und (8), welche in E quadratisch sind, die Elastizitätsmoduli zu

$E' = 1\,926\,141$ kg/cm² nach Navier und
$E'' = 1\,924\,029$ » » Résal.

Diese wenig von einander verschiedenen Werte sind etwas kleiner als man für das Material zunächst erwarten sollte, doch ist hierbei zu beachten, daß die Biegeversuche quer zur Walzrichtung des Materials vorgenommen wurden, was kleinere Werte von E erklärt.

Die Berechnung der Formänderungen nach Gl. (8) ist sehr empfindlich, weil sowohl $e = r_s - r_0$ als auch $3r - \frac{h^2}{e}$ kleine Differenzen verhältnismäßig sehr großer Zahlen vorstellen; aus diesem Grunde wurden die Gleichungen (7) und (8) auf der Maschine berechnet und auch die zur Bestimmung des Nullradius r_0 erforderlichen natürlichen Logarithmen durch Reihenentwicklung unter Berücksichtigung von entsprechend vielen Gliedern bestimmt.

Die Zahlentafeln 3 und 4 enthalten die Ergebnisse dieser Berechnungen nach Gl. (7) und (8), wobei neben den gesamten Formänderungen noch die anteiligen Formänderungen infolge der Normalkräfte, Querkräfte, Biegungsmomente 1. und 2. Ordnung aufgeführt wurden, welche bzw. als Δ_1', Δ_2', Δ_3', Δ_4' und Δ_1'', Δ_2'', Δ_3'', Δ_4'' bezeichnet sind.

Zahlentafel 3.
Formänderungen bei 0,7 P_G'' nach Navier.

Ring	B	C	D	E	F	G
Δ_1'	− 0,001 086	− 0,005 419	− 0,007 090	− 0,008 611	− 0,010 005	− 0,010 981
Δ_2'	+ 0,002 043	+ 0,002 897	+ 0,003 569	+ 0,004 072	+ 0,004 409	+ 0,004 498
Δ_3'	+ 0,422 964	+ 0,595 751	+ 0,389 771	+ 0,269 336	+ 0,185 508	+ 0,128 538
Δ_4'	+ 0,002 140	+ 0,001 720	+ 0,000 742	+ 0,000 357	+ 0,000 171	+ 0,000 083
Δ'	0,426 061	0,594 949	0,386 992	0,265 154	0,180 083	0,122 138

Zahlentafel 4.
Formänderungen bei 0,7 P_G'' nach Résal.

Ring	B	C	D	E	F	G
Δ_1''	0,000 653	0,000 919	0,001 121	0,001 257	0,001 323	0,001 291
Δ_2''	0,002 040	0,002 864	0,003 492	0,003 918	0,004 918	0,004 014
Δ_3''	0,419 630	0,584 013	0,374 132	0,250 266	0,163 334	0,104 126
Δ_4''	0,002 110	0,001 655	0,000 685	0,000 310	0,000 133	0,000 055
Δ''	0,424 433	0,589 451	0,379 430	0,255 751	0,168 947	0,109 486

Zahlentafel 5.
Formänderungen nach Versuch, nach Navier und nach Résal.

Ring	B	C	D	E	F	G
Δ' (Navier)	0,426	0,595	0,387	0,265	0,180	0,122
Δ'' (Résal)	0,424	0,589	0,379	0,256	0,169	0,109
Δ (Versuch) . . .	0,389	0,536	0,360	0,242	0,168	0,119
$\frac{\Delta' - \Delta}{\Delta} \cdot 100$ . . .	+ 9,5	+ 11,0	+ 7,5	+ 9,5	+ 7,1	+ 2,5
$\frac{\Delta'' - \Delta}{\Delta} \cdot 100$ . . .	+ 9,0	+ 9,9	+ 5,3	+ 5,8	+ 0,6	− 8,0

In Zahlentafel 5 sind die beobachteten und die auf $^1/_{1000}$ mm abgerundeten gesamten Formänderungen zusammen mit den prozentualen Fehlern $\frac{\Delta' - \Delta}{\Delta} \cdot 100$ nach der Navier-

schen und $\frac{\Delta'' - \Delta}{\Delta} \cdot 100$ nach der Résalschen Theorie aufgenommen. Der mittlere prozentuale Fehler beträgt für die Formänderungen nach Navier 7,85 vH und nach Résal 3,77 vH.

Schlußfolgerungen. Die in den Zahlentafeln 2 und 5 zusammengefaßten Versuchsergebnisse führen zu folgenden Schlußfolgerungen:

1. Die Rechnung nach Navier führt bei gekrümmten Stäben zu einer zu günstigen Beurteilung des Spannungszustandes und zwar um so mehr, je größer das Verhältnis der Stabdicke zum Krümmungshalbmesser ist.
2. Bei gekrümmten Stäben von gedrungener Form ist der Fehler der Spannungsermittlung nach Navier größer als mit Rücksicht auf den in praktischen Fällen angestrebten Sicherheitsgrad statthaft ist.
3. Die Spannungsermittlung nach Résal ergibt eine für die Bedürfnisse der Technik einwandfreie Annäherung; ob man hierbei nach der günstigen oder nach der ungünstigen Seite abweicht, läßt sich nach den hier mitgeteilten Versuchen noch nicht zuverlässig entscheiden, doch ist auch nach Résal eine noch etwas zu günstige Spannungsbeurteilung wahrscheinlich.
4. Zur Berechnung der Formänderungen gekrümmter Stäbe ist die Theorie Résals ebenfalls verläßlicher als die von Navier; beide Theorien ergeben übrigens zu große Formänderungen.

Für die Fälle der praktischen Anwendung ist schließlich eine Entscheidung darüber noch wichtig, bis zu welchem Schlankheitsgrad die wegen ihrer Einfachheit beliebte Rechnung nach Navier noch andwendbar bleibt.

So weit man bei einer Untersuchung auf die Ermittlung von Formänderungen abhebt, insbesondere also z. B. bei der Berechnung von statisch unbestimmten Systemen, besteht nach den Versuchen kein zwingender Anlaß, nicht nach Navier zu rechnen, zumal ja gerade bei den angedeuteten Aufgaben der Baustatik gewöhnlich »schlanke« Stäbe im Sinne dieser Untersuchung vorliegen und andererseits bei der Ermittlung der statisch Unbestimmten meist schon vereinfachende Annahmen wie z. B. über die Trägheitsmomente, Reibungslosigkeit von Gelenken oder Unnachgiebigkeit von Stützen oder vom Baugrund gemacht zu werden pflegen, denen gegenüber eine etwas unscharfe Erfassung der Formänderungen keine bedeutende Rolle mehr spielt.

Anders liegen die Verhältnisse, wo es sich um die Ermittlung der Spannungen handelt. Um hierüber zu einem Werturteil bezüglich der beiden Theorien zu gelangen, wurden in Zahlentafel 6 die nach den beiden Theorien sich ergebenden Fehler bei der Spannungsermittlung mit dem die Ringschlankheit kennzeichnenden Verhältnis der Ringdicke zum mittleren Krümmungshalbmesser zusammengestellt.

Zahlentafel 6.

Fehler der Spannungsermittlung nach Navier und Résal in Abhängigkeit vom Schlankheitsgrad.

Ring	A	B	C	D	E	F	G
$\frac{r_a - r_i}{r_s}$	0,105	0,222	0,357	0,503	0,664	0,860	1,075
Fehler nach Navier vH	—	+ 9,47	+ 15,13	+ 10,34	+ 17,8	+ 38,5	+ 56,7
Fehler nach Résal . vH	—	+ 5,27	+ 5,79	— 3,64	— 3,06	+ 5,9	+ 8,11

Hiernach wären denn, wofern man einen Fehler von mehr als etwa 10 vH bei der Spannungsermittlung ausschließen will, gekrümmte Stäbe mit einem größeren Wert als etwa $^1/_5$ für das Verhältnis zwischen Stabdicke und mittlerem Krümmungshalbmesser nach Résal zu berechnen. Abgesehen von zahlreichen Fällen des Maschinenbaues, bei denen solche gedrungene Formen zur Anwendung kommen, würde die Résalsche Theorie auch im Eisenbau und zwar dort namentlich zur Berechnung steifer Eckverbindungen (Anschluß von Brückenquerträgern an die vertikalen Pfosten, Vierendeelträger und Rahmen) am Platze sein. 572

Zur Anisotropie kreuzweise bewehrten Betons.

Von **H. LEITZ** in München.

Mit fortschreitender Entwicklung der Eisenbetonbauweise wachsen auch der Umfang und die Schwierigkeit der gestellten Probleme. In wachsendem Maße wird die Elastizitätstheorie zu ihrer Lösung und zur Ableitung von Näherungsformeln herangezogen; besonders eingehend ist die Theorie der Platten in den letzten Jahren behandelt worden. Jedoch wird es zweckmäßig sein, zu untersuchen, ob die hierbei meist vorausgesetzte Isotropie bei den üblichen Bewehrungen vorhanden ist, und ob nicht die Theorie der anisotropen Platte anzuwenden ist, damit nicht die durch Anwendung der Elastizitätstheorie erstrebte Genauigkeit in der Berechnung durch die Ungenauigkeit in den Grundannahmen mehr als aufgehoben wird.

Platten dieser Art sind meist durch zwei sich rechtwinklig kreuzende Scharen von Rundeisen armiert, welche die Zugzone zur Aufnahme eines zweidimensionalen Spannungszustandes mit Zugspannungen befähigen sollen. Es sei eine solche Zone in ihrem Verhalten gegen Reckung in ihrer Ebene untersucht. Die Theorie des Eisenbetons geht von der Grundannahme aus, daß die Rundeiseneinlagen druck- und zugfeste Fäden ohne Biegungswiderstand darstellen, nach dem Muster des Fadenmodells der Kettenlinie, welche genau die Deformation des Betons mitmachen. Bei einem Elastizitätsmodul des Betons $= E_b$, des Eisens E_e, und einem Verhältnis $E_e/E_b = n$, ist dann die Längsspannung der Eisen gleich dem n-fachen des sie umgebenden Betons, $\sigma_e = n\,\sigma_b$. Die Schubspannungen parallel und senkrecht zur Eisenachse in dem Eisenquerschnitt sind, wie aus der Betrachtung der Schubspannungen in der Berührungsfläche von Eisen und Beton, sowie dem Dualitätsprinzip folgt, bei den kleinen Eisenquerschnitten nur gleich dem einfachen Wert der im Beton an der Stelle herrschenden Schubspannung. Damit ist der Spannungszustand der Eiseneinlagen festgelegt, wenn der Spannungs- oder Deformationszustand des Betons bekannt ist, oder angenommen wird.

Ist eine kreuzweise armierte Scheibe (Abb. 1) mit den Seitenlängen gleich der Einheit nach den Richtungen X und Y durch je eine Schar Rundeisen mit der Gesamtquerschnittsfläche φ_x bzw. φ_y armiert, so werden die Beziehungen zwischen der Dehnung in der X-Richtung und der Gesamtzugspannung $\sigma_x =$ Betonzugspannung $\sigma_{bx} +$ Summe der Eisenspannungen $\varphi_x \sigma_{ex}$ für den Betonquerschnitt mit der Seitenlänge 1, wiedergegeben durch die Gleichungen $\varepsilon_x = \frac{\sigma_{ex}}{E_e} = \frac{\sigma_{bx}}{E_b} = \frac{\sigma_x}{E_b(1 + n\,\varphi_x)}$.

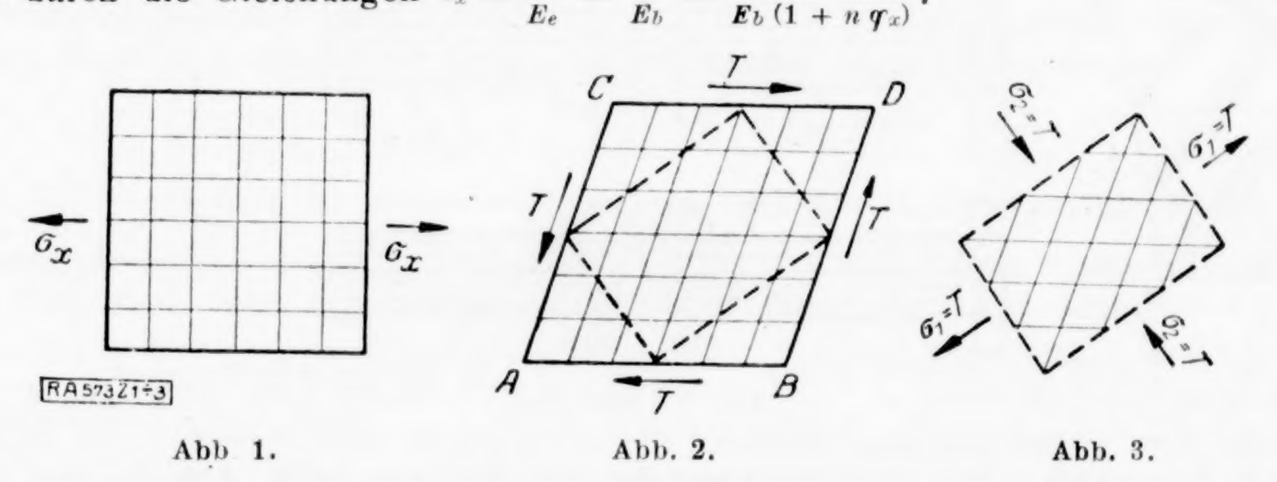


Abb. 1. Abb. 2. Abb. 3.

Wird dieselbe Scheibe auf Schub beansprucht, so wird sie sich nach Abb. 2 deformieren, d. h. die Eisen werden schräg gestellt, ohne eine Verlängerung oder Verkürzung zu erfahren; sie bleiben infolgedessen spannungslos. Dabei wird von den Störungen abgesehen, die dadurch entstehen, daß die Eisen bei endlichen Eisendurchmessern diese Schubdeformation in ihrem Innern nicht mitmachen, da ihre Schubspannungen diejenigen des Betons kaum übersteigen. Bei den üblichen kleinen Eisendurchmessern und dem normalen Prozentsatz an Eisenquerschnitt = ca. 2 vH können diese sekundären Störungen vernachlässigt werden. Demnach ist die Beziehung zwischen Schubspannung und Schiebung $\mu = \frac{\tau}{G_b} = \frac{2\,\tau}{E_b}$ für $\frac{1}{m} = 0$, d. h gleich derjenigen von nichtarmiertem Beton, und nicht, wie es bei isotropem Material sein müßte, $\mu = \frac{2\,\tau}{E_b(1 + n\varphi)}$.

Die in der Richtung $A-D$ auftretende Zugspannung $\sigma_1 = \tau$ steht mit der Dehnung in dieser Richtung, wenn man die Querkontraktion zu Null annimmt ($m = \infty$), in dem Zusammenhang $\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E_b}$, während für die X Richtung gilt $\varepsilon_b = \frac{\sigma_x}{E_b(1 + n\varphi_x)}$. Der in der gezeichneten Art armierte Beton ist also anisotrop; er hat in der Richtung der Eiseneinlagen den Gesamtelastizitätenmodul $E_x = E_b(1 + n\varphi_x)$, in der Richtung der Winkelhalbierenden $E_1 = E_b$; mit $n =$ ca. 10 und $\varphi =$ ca. 3 vH ergibt sich ein Unterschied von etwa 30 vH, der sich allerdings bei ganzen Konstruktionen nicht in dieser Höhe auswirken wird, weil in den Teilen mit den größten Normalspannungen die Eisen gewöhnlich in deren Richtung angeordnet werden. So im Stadium I bei Mitwirkung des Betons.

Im Stadium II wird angenommen, daß der Beton infolge Rißbildung nicht mehr fähig ist, Zugspannungen aufzunehmen. Bei einer Beanspruchung der Scheibe nach Abb. 1 wird $\varepsilon = \frac{\sigma_{ex}}{E_e} = \frac{\sigma_x}{n E_b \varphi_x}$ und der Elastizitätsmodul des Systems hat für die X-Richtung die Größe $n E_b \varphi_x$. Bei Schubbeanspruchung nach Abb. 2 ist der Beton der Richtung $A-D$ infolge Rißbildung nicht mehr in der Lage, Zugspannungen aufzunehmen, das Eisennetz würde zusammenklappen, wenn nicht der Beton in der Richtung senkrecht dazu, als Spreizen wirkend, dies verhinderte. Man übersieht leicht, daß die Systemschubspannung τ aufgenommen wird, wenn jede Eisenschar auf die Schnittbreite 1 eine Gesamtzugkraft gleich der Schubspannung τ entwickelt, und der Beton in Richtung $2 = C - B$ eine durchschnittliche Druckspannung $\sigma_2 = 2\tau$ aufweist. Demnach $\sigma_{ex} = \frac{\tau}{\varphi_x}$, $\sigma_{ey} = \frac{\tau}{\varphi_y}$, $\sigma_{b1} = 0$, $\sigma_{b2} = -2\tau$ (Abb. 4). In der Richtung $A-D$ entspricht der dort vorhandenen resultierenden Systemhauptspannung $\sigma_1 =$ eine Dehnung, die sich für $1/m = 0$ zusammensetzt aus der Eisendehnung ε_{ex} + der Betonzusammendrückung ε_{b2} + den örtlichen Verdrückungen des Betons in den Kreuzungspunkten der Eisen, wo Eisen- und Betonspannungen sich zur Schubspannung zusammensetzen. Letzterer Anteil ist theoretisch kaum berechenbar, dürfte aber nach Lage der Dinge weit größer als die beiden andern Anteile sein, so daß der Elastizitätsmodul in der Richtung 1, d. h. das Verhältnis $\frac{\sigma_1}{\varepsilon_1}$ weit kleiner als derjenige in Richtung x wird, vielleicht in vielen Fällen überhaupt nicht mehr in Rechnung gestellt werden kann. Hierüber kann nur die Betrachtung von Versuchen Auskunft geben.

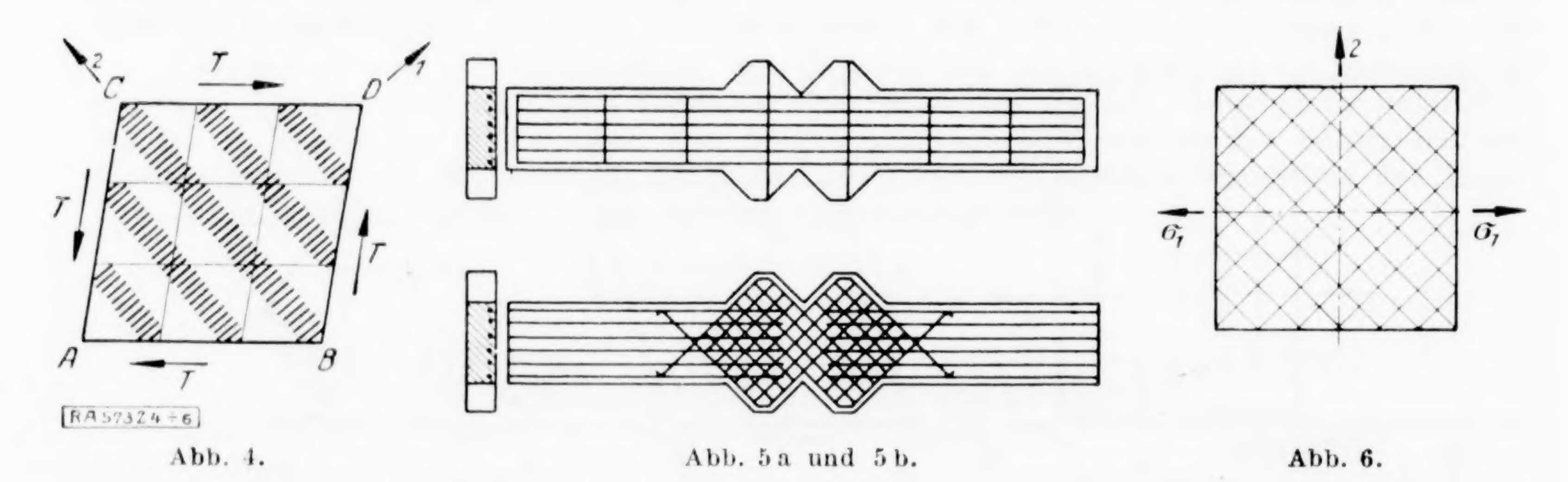


Abb. 4. Abb. 5a und 5b. Abb. 6.

Prof. Suenson[1]) hat Biegungsversuche mit Körpern nach Abb. 5a und 5b angestellt. Die Zugzone des Balkens 5b ist in Abb. 6 dargestellt. Um die Biegungsspannung σ in der Zugzone aufzunehmen, müssen die Eisen in jeder Schar die Gesamtzugspannung σ aufnehmen, wobei $\sigma_e = \frac{\sigma}{\varphi_e}$, der Beton in Richtung 2 die mittlere Druckspannung $\sigma_b = \sigma$. Das Diagramm der Dehnungen ε_1 in Richtung der Balkenachse auf der Mittellinie der Zugseite gemessen (Abb. 7) zeigt, daß die schrägarmierten Balken vom Beginn der Rißbildung ab, außerordentlich viel (bis zu etwa 30 mal) größere Dehnungen aufweisen, als die gerade armierten, d. h. daß ihr Faktor Ei in der Biegungsgleichung bis auf vernachlässigbare Werte herabsinkt.

[1]) Beton und Eisen 1922, S. 145 ff. Eisenbetonbewehrung unter einem Winkel mit der Richtung der Normalkraft.

Damit übereinstimmende Ergebnisse zeigen die Versuche des deutschen Ausschusses für Eisenbeton, bespr. in Mörsch, der Eisenbetonbau, Bd I, 1. Hälfte, S. 250 ff., von denen zwei Zylinder nach Abb. 8 herausgegriffen seien. Zylinder b ist nahe der Oberfläche kreuzweise mit Rundeisen von 10 mm in 10,8 cm Abstand bewehrt; seine Beanspruchung auf Verdrehung ergibt für die Oberflächenschicht eine Beanspruchung ähnlich Abb. 4, wenn man von der Zylinderkrümmung absieht. Zylinder a ist nur einfach spiralenförmig nach der Richtung der Hauptzugspannungen der Verdrehung, mit nur einer Schar derselben Eisen im selben senkrecht zu den Eisen gemessenen Abstand bewehrt. Die Zylinder b ergaben eine Bruchlast von nur dem 1,6 fachen derjenigen gleichgroßer nicht bewehrter Zylinder, während die Zylinder a trotz des halben Eisenaufwandes das mehr als dreifache erreichten. Das genanntem Buch entnommene Diagramm der Winkeländerungen der Mantellinien (= prop. dem Verdrehungswinkel) zeigt auch die bedeutend vergrößerten Verdrehungen der Zylinder der Reihe b.

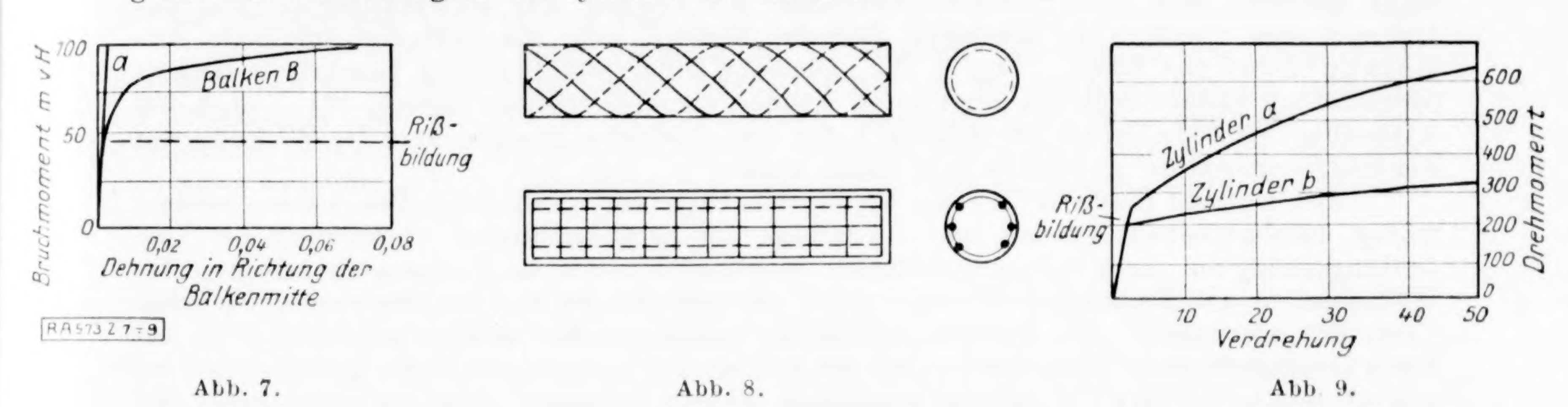


Abb. 7. Abb. 8. Abb. 9.

Hiermit ist qualitativ wohl genügend die Anisotropie kreuzweise bewehrten Betons dargelegt. Nach der X- und Y-Richtung mit den Eisenfeldstärken q_x und q_y bewehrte Platten weisen im Stadium I bei Mitwirkung des Betons die Moduln auf: $E_x = E_b\,(1 + n\,q_x)$, $E_y = E_b\,(1 + n\,q_y)$ und $G_{xy} = E_b/2$, wobei im letzteren Falle von Widerständen sekundärer Art abgesehen und $1/m = 0$ gesetzt ist. Im Stadium II ist $E_x = n\,E_b\,q_x$, $E_y = n\,E_b\,q_y$, und G_{xy} abnehmend bis auf einen sehr kleinen Wert, der aus Sicherheitsgründen für die ganze Ausdehnung oder wenigstens die hochbeanspruchten Teile einer Konstruktion zu Null angenommen werden muß.

Eine besondere Tragweite haben diese Ausführungen für die Theorie der kreuzweise bewehrten, auf Biegung beanspruchten Platten des Eisenbetonbaus. Die Beziehungen zwischen inneren Kräften und Deformationen werden ausgedrückt durch:

$$m_x = N i_x \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{1}{m}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right), \qquad t_{xy} = 2\,G\,i' \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y},$$

wo $N = \frac{m^2}{m^2 - 1} E_b$ und für $1/m = 0$ $N = E_b$; i_x und i_y = Trägheitsmomente der armierten Querschnitte von der Breite 1, und i' im Stadium I, $i' = h^3/_{12}$ im Stadium II im Grenzfall gleich Null wird. Die sich ergebende Differentialgleichung lautet dann:

$$i_x \frac{\partial^4 z}{\partial x^4} + 2\,i_0 \frac{\partial^4 z}{\partial x^2\,\partial y^2} + i_y \frac{\partial^4 z}{\partial y^4} = \frac{p}{N}\,^{1)}, \quad \text{wo} \quad i_0 = \frac{1}{m}\left(\frac{i_x + i_y}{2}\right) + \frac{m-1}{m}\,i'$$

und geht für $1/m = 0$ und verschwindende Verdrehungssteifigkeit ($i' = 0$) über in die Grenzform: $i_x \frac{\partial^4 z}{\partial x^4} + i_y \frac{\partial^4 z}{\partial y^4} = \frac{p}{E_b}$.

Die Differentialgleichung der isotropen Platte ist für zahlreiche technisch wichtige Sonderfälle zahlenmäßig diskutiert. Für die anisotrope Platte hat Huber verdienstvoller Weise im Bauingenieur 1925 eine Reihe von Lösungen gegeben; die Technik behilft sich einstweilen mit Näherungsmethoden.

Diese beziehen sich auf rechteckige Platten mit gleichförmiger Belastung für verschiedene Auflagerungen. Die ältere Methode, auf der auch die alten Berechnungs-

[1]) Huber, Grundlagen einer rationellen Berechnung der kreuzweise bewehrten Eisenbetonplatten. Zeitschr. d. Oester. Ing. u. Arch.-Vereins 1914, S. 557.

Föppl, Neuere Fortschritte der technischen Elastizitätstheorie, Zeitschr. f. ang. Math. u. Mech. 1921, S. 475.

Leitz, Eisenbewehrte Platten bei allgemeinem Biegungszustand, Bautechnik 1923, S 155.

methoden der amtlichen Vorschriften beruhen, betrachtet zwei zueinander senkrecht stehende Achsen-Streifen der Platte von der Breite eins, gibt jedem dieser Streifen eine Belastung p_x bzw. p_y, die daraus ermittelt wird, daß die Durchbiegung der beiden Streifen in der Mitte einander gleichgesetzt wird. Z. B., für die freiaufliegende Platte mit den Seitenlängen l_x und l_y ist die genannte Durchbiegung

$$\frac{5\, p_x\, l_x^4}{384\, E i_x} = \frac{5\, p_x\, l_y^4}{384\, E i_y} \quad \text{woraus} \quad p_x = p\,\frac{l_y^4}{l_x^4 + l_y^4},$$

oder allgemein ausgedrückt, hat die Durchbiegung eines solchen Streifens für eine gleich mäßig verteilte Last $p = 1$ den Wert δ_x bzw. δ_y so ist $p_x = p\,\frac{\delta_y}{\delta_x + \delta_y}$ und entspr. p_y; die mit diesen Belastungen errechneten Momente der Streifen dienen zur Dimensionierung der Platte. Da die Verwindungssteifigkeit der Platte nicht in Rechnung gestellt ist, bedeutet diese Methode eine rohe Näherungsmethode zur Lösung der Differentialgleichung mit $1/m = 0$ und $i' = 0$. In ähnlichen Bahnen bewegt sich die Näherungsmethode von Hotopp (Beton und Eisen, 1922, S. 95). Dieselbe Differentialgleichung bearbeitete Hager (Berechnung ebener rechteckiger Platten mittels trigonometrischer Reihen, 1911) nach der Ritzschen Methode, wobei im Ausdruck für die elastische Energie von der Wirkung der Verdrillungsmomente gleichfalls abgesehen wurde.

Die isotrope Platte ist für die wichtigsten Fälle von zahlreichen Bearbeitern zahlenmäßig durchgerechnet worden und die infolge der berücksichtigten Einwirkung der Verdrillungssteifigkeit stark herabgeminderten Biegungsmomente in Plattenmitte erregten das Wohlgefallen der Techniker. Weniger gern beschäftigt man sich mit der Frage, wie diese Verdrillungsmomente von der Eisenbetonplatte aufgenommen werden sollen, und ob die Verdrillungssteifigkeit derselben auch derjenigen einer isotropen Platte gleichwertig ist, worauf schon L. Föppl in seinem genannten Referat hinweist. Für die Auswertung der Differentialgleichung der isotropen Platte sind auch elementare Näherungsmethoden erdacht worden. In seinem Werkchen: Die vereinfachte Berechnung biegsamer Platten, 1925, geht Marcus von der ersten obengenannten Streifenmethode aus und überweist von deren Biegungsmomenten $\mathfrak{M}$ einen Bruchteil φ den Verdrillungsmomenten, und nur der Rest $\mathfrak{M}(1-\varphi) = \mathfrak{M}\cdot\nu$ verbleibt als Biegungsmoment den Streifen. Dieser Bruchteil φ, dessen Wert zwischen $^5/_{12}$ bei freiaufliegender quadratischer Platte und $^5/_{36}$ bei eingespannter Platte liegt, wird durch einen einfachen von Auflagerung und Plattenabmessungen abhängigen Ausdruck dargestellt. Auf diese Weise werden für die Biegungsmomente in Plattenmitte gut mit der Elastizitätstheorie der isotropen Platte ($1/m = 0$) übereinstimmende Werte erhalten. Weniger zutreffend sind dagegen die Näherungsformeln für die Verdrillungsmomente in der Ecke der freiaufliegenden Platte (S. 52 ff.). Sie ergeben bei quadratischer Form ein mittleres Diagonalbiegungsmoment von $pl^2/30$, während dieses auf Grund rein statischer Betrachtung für jedes Formänderungsgesetz $pl^2/24$ sein muß. Die weitere Frage wie die Verdrillungsmomente von Eisenbeton aufzunehmen sind, ist nicht behandelt.

Der Kern der Plattenfrage des Eisenbetons liegt in der Verdrillungssteifigkeit und den Verdrillungsmomenten, anders gesprochen in der Berücksichtigung der Anisotropie. Einfache Näherungsmethoden, die letztere berücksichtigen, können den Sachverhalt besser wiedergeben als die beste Ausarbeitung der Theorie der isotropen Platte. Eine Ausdehnung der von Huber begonnenen Arbeiten auf dem Gebiet der anisotropen Platte wäre daher sehr zu begrüßen.

München, August 1925. 573

Einige Anwendungen der Biegungstheorie orthotroper Platten.

Von M. T. HUBER in Lemberg.

Die Theorie der orthotropen[1]) Platten wurde vom Verfasser bereits im Jahre 1914 zur Klarstellung des Formänderungs- und Spannungszustandes der kreuzweise armierten Betonplatten, dichter Balkennetze, Wellblechtafeln und dergl. herangezogen. Nach späterer Verbesserung und Vereinfachung der Ableitungen bekam der Ausdruck für die potentielle Energie L_i der verbogenen Platte und die Differentialgleichung der Biegungsfläche unter Verwendung der abkürzenden Bezeichnung:

$$2\,H = \frac{B_1}{m_2} + \frac{B_2}{m_1} + 4\,C$$

[1]) »Orthotrop«, Abkürzung für »orthogonal-anisotrop«.

folgende Gestalt[1]):

$$
\left.\begin{aligned}
L_i = \frac{1}{2}\int\!\!\int \Big\{ B_1 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 + 2\,H \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + B_2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2 \\
- 4\,C\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\right)^2\right]\Big\}\, d\,x\,d\,y
\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (1)
$$

$$
B_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\,H \frac{\partial^4 w}{\partial x^2\,\partial y^2} + B_2 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = p\,(x, y) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2).
$$

Dabei bedeutet w die in der Z-Richtung erfolgende Ausbiegung des Punktes $|x, y, o|$ der ursprünglichen Plattenmittelebene $X\,Y$; ferner sind B_1 und B_2 die Plattenbiegungssteifigkeiten in der $X\,Z$- bzw. $Y\,Z$ Ebene, bezogen auf die Einheit der Querschnittsbreite; $2\,C$ die Plattentorsionssteifigkeit; $\frac{1}{m_1}$ und $\frac{1}{m_2}$ die reduzierten Querdehnungszahlen; schließlich p der Belastungsdruck als Funktion von x, y.

Es zeigte sich, daß obige Formeln für die Biegung von dünnen orthogonal-anisotropen Platten durch senkrechte Lasten, strenge Gültigkeit beanspruchen können, falls nur die Elastizitätsachsen mit den Koordinatenachsen zusammenfallen, was übrigens bei der elementaren Ableitung in erwähnten Arbeiten vorausgesetzt wurde. Wenn dies nicht der Fall wäre, so müßte z. B. die Gleichung der Biegungsfläche noch folgende Glieder enthalten:

$$
G_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^3\,\partial y} + G_2 \frac{\partial^4 w}{\partial x\,\partial y^3}.
$$

Diese Glieder verschwinden aber infolge des Nullwerdens der Koeffizienten G_1 und G_2, wenn man die Elastizitätsachsen zu Koordinatenachsen wählt. Die Grundlagen für eine allgemeine Theorie der anisotropen, dünnen Platten sind, wie ich mich nachträglich überzeugt habe, bereits von F. Gehring in der Berliner Dissertation vom Jahre 1860 (»De aequationibus differentialibus, quibus aequilibrium et motus laminae crystallinae definiuntur«) und augenscheinlich unabhängig davon von M. J. Boussinesq (Journ. de Math. (1879), S. 329 bis 344) bearbeitet worden.

In meinen ersten Veröffentlichungen begnügte ich mich mit einfachen Näherungslösungen der Differentialgleichung (2) in einigen praktisch wichtigen Belastungsfällen. Von später gefundenen zahlreichen strengen Lösungen scheinen bis jetzt nur diejenigen allgemein bekannt zu sein, die in den »Comptes Rendus« der Pariser Akademie (Bd. 170, (1920), S. 511 und 1305) erschienen sind. Ueber die anderen Lösungen, die bisher nur in polnischer Sprache zur Veröffentlichung kamen[2]) sowie über den Weg, welchen ich (1917/18) eingeschlagen habe, um möglichst einfach bequeme analytische Darstellung der Biegungsfläche in vielen praktisch wichtigen Fällen zu erhalten, soll jetzt kurz berichtet werden.

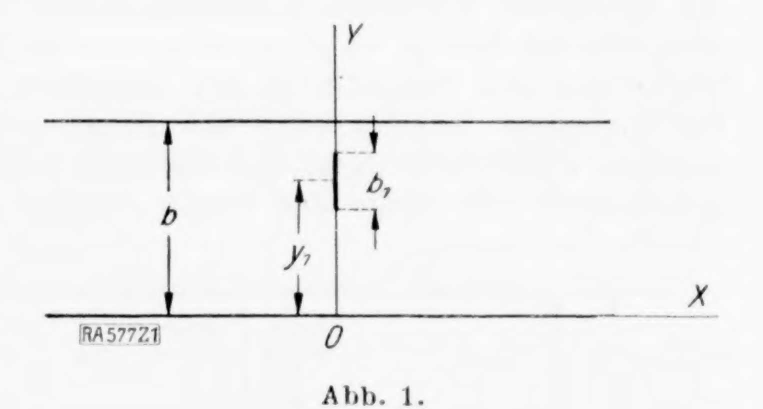


Abb. 1.

Den Ausgangspunkt bildeten die Lösungen für eine unendlich lange beiderseits einspannungsfrei gestützte Platte (»Plattenstreifen«), bei einer von x unabhängigen Belastung $p\,(y)$ von beliebiger Länge. Ganz ähnlich wie dies von A. Nádai in der bekannten Arbeit vom Jahre 1915 gezeigt wurde, gewinnt man verhältnismäßig leicht die betreffenden Lösungen in der Gestalt von einfach unendlichen Reihen. Beispielsweise ist im Falle einer gleichförmigen Linienbelastung $q'\,b_1$ auf der Y-Achse mit der mittleren Ordinate y_1 (die X-Achse bildet den Plattenrand. (Abb. 1).

$$
w = \frac{2\,q'\,b^4}{\pi^5\,B_2} \sum_{n=1,2,3,\ldots} \frac{(n, b_1, y_1)}{n^4} \cdot \frac{\beta\, e^{-\frac{n\,x}{\beta}} - \alpha\, e^{-\frac{n\,x}{\alpha}}}{\beta^2 - \alpha^2} \sin \frac{n\,\pi\,y}{b} \quad . \; . \; . \; . \quad (3)
$$

[1]) M. T. Huber, Die Grundlagen einer rationellen Berechnung der kreuzweise bewehrten Eisenbetonplatten, Zeitschr. d. Oester. Ing. u. Arch. Ver. 1914, Nr. 30; oder die ursprüngliche Bearbeitung in polnischer Sprache mit französischer Zusammenfassung: »La théorie génerale des hourdis en béton armé . . ., Czasopismo tech., Lwów 1914. — Die Neubearbeitung der allgemeinen Theorie ist im »Bauingenieur« vom Jahre 1923, H. 12 und 13 erschienen.

[2]) Teorja płyt prostokątnie-różnokierunkowych . . Im Verl. der poln. Wissenschaftlichen Gesellschaft in Lemberg (Lwów) (1921), 250 S. (in Kommission bei Gubrynowicz i Syn, Lwów).

mit

$$\left.\begin{matrix}\alpha\\ \beta\end{matrix}\right\} = \frac{b}{\pi}\sqrt{\frac{H \mp \sqrt{H^2 - B_1 B_2}}{B_2}} \quad \text{und} \quad (n, b_1, y_1) = \sin\frac{n\pi}{2}\cdot\frac{b_1}{b}\sin\frac{n\pi y_1}{b}.$$

1. Wenn nun die Gleichung der Biegungsfläche für die unendlich lange Platte von der Breite b bekannt ist, die einer sonst beliebigen Belastung $p(x, y)$ eines rechteckigen Plattenteiles von der Länge a entspricht, so teilen wir die unendlich lange Platte durch Querstützungen in rechteckige Felder von gleicher Länge a (Abb. 2) und belasten alle Felder abwechselnd mit gegebener Belastung p und einer Belastung p^*, die spiegelbildlich zu der ersteren in Bezug auf die vertikale Ebene der Querstützungsreaktionen gestaltet ist. Die dadurch erzeugte Biegungsfläche der unendlich langen Platte muß aus Symmetriegründen in allen Punkten der Auflagerlinien horizontale Tangenten besitzen; folglich wird dabei dieselbe Biegungsfläche des Plattenfeldes hervorgerufen, wie wenn dieses Plattenfeld von der Länge a längs der Ränder b vollkommen eingespannt wäre.

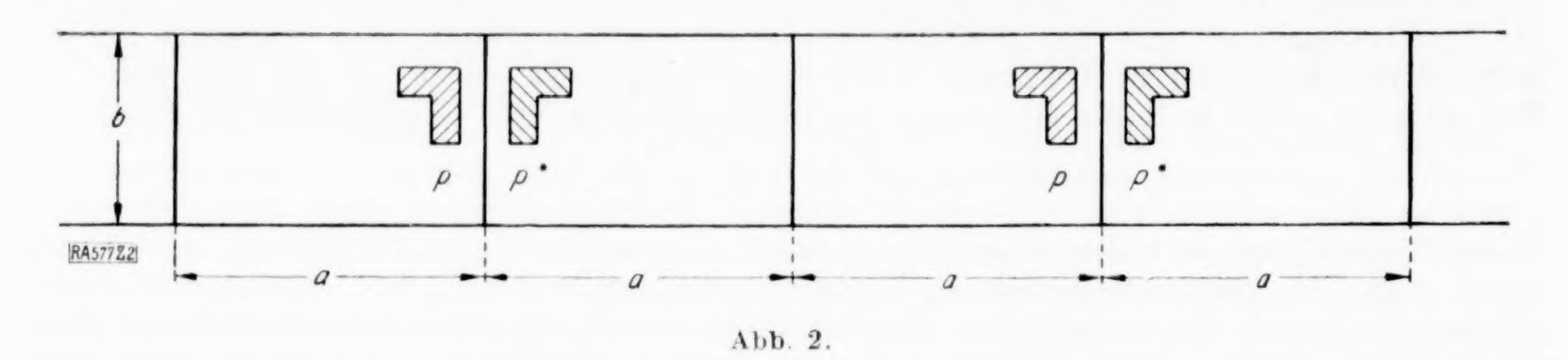


Abb. 2.

Die unbekannten Auflagerreaktionen der Querränder sind jetzt als negative Belastungen aufzufassen und die ihnen allein entsprechende Biegungsfläche $w_2(x, y)$ der unendlich langen Platte ist durch eine Fouriersche Reihe mit der Variablen y darzustellen. Bezeichnet w_1 die Ordinate der Biegungsfläche der unendlichen Platte ohne Querstützungen bei den Belastungen p und p^* aller Felder, so ergibt sich $w = w_1 + w_2$ als die Lösung unserer Aufgabe. Dabei werden die Koeffizienten der Reihe für w_2 aus der Bedingung bestimmt, daß in der Auflagergeraden $w_1 + w_2$ verschwinden muß.

2. Im Falle der einspannungsfreien Stützung des ganzen Plattenumfanges läßt sich ein ähnliches Verfahren anwenden. Die Felder $a\,b$ der unendlichen Hilfsplatte sind dann abwechselnd mit $p, -p^*, p, -p, \ldots$ zu belasten, wodurch eine wellenförmige Biegungsfläche mit den Grenzlinien der einzelnen Felder als Wendegeraden erzeugt wird (Abb. 3). Infolgedessen verschwinden die Biegungsmomente längs dieser Geraden und das Gleichgewicht eines beliebigen Plattenfeldes $a\,b$ wird nicht gestört, wenn es beiderseits herausgeschnitten und längs der neuen Ränder frei gestützt wird.

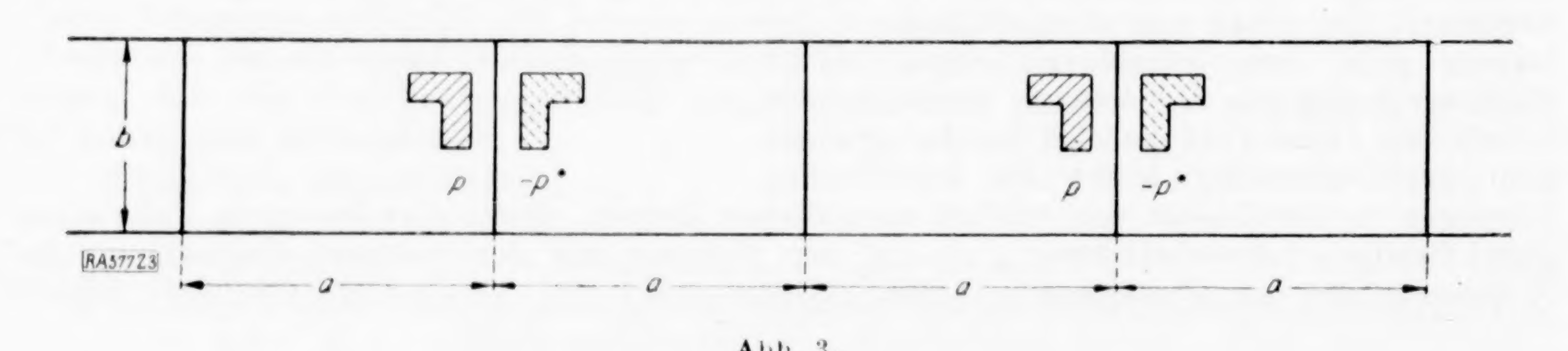


Abb. 3.

3. Gesetzt den Fall, wir suchten nun die Biegungsfläche einer sonst frei aufgelagerten rechteckigen Platte $a\,b$, die längs des einen Breitenrandes b vollkommen eingespannt und mit $p(x, y)$ belastet ist. Dann ist die unendliche Hilfsplatte von derselben Breite b in Felder von der Länge a zu teilen (Abb. 4) und die aufeinanderfolgenden Felder nach dem folgendem Schema zu belasten:

$$\begin{matrix} n, & n+1, & n+2, & n+3, & n+4, & n+5, & n+6, & n+7; \ldots \\ p, & p^*, & -p, & -p^*, & p, & p^*, & -p, & -p^*. \ldots \end{matrix}$$

Dabei bezeichnet wie früher p^* eine Belastung, die spiegelbildlich zu p bezüglich der Grenzgeraden benachbarter Felder n und $(n+1)$, bzw. $(n+4)$ und $(n+5)$ ... verteilt ist.

Bei dieser Gesamtbelastung entsteht offenbar die wellenförmige Biegungsfläche w_1 von der Wellenlänge 4 a und den Wendegeraden zwischen den Feldern $(n-1)$ und n; $(n+1)$ und $(n+2)$; $(n+3)$ und $(n+4)$. Läßt man nun in den Grenzgeraden $(n/n+1)$, $(n+2/n+3)$, ... die abwechselnd nach oben und unten gerichteten, sonst aber gleichen

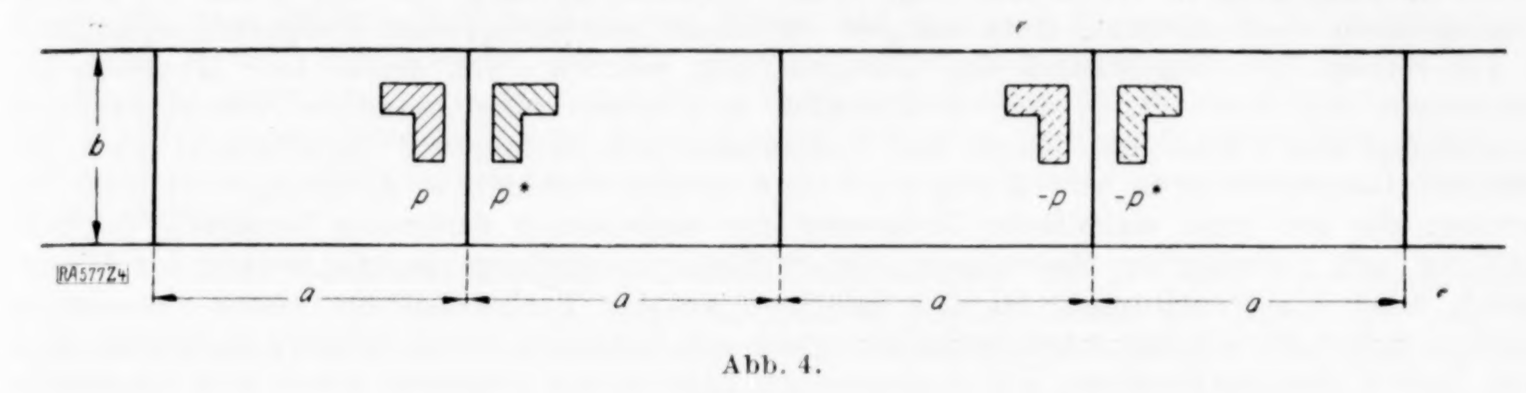


Abb. 4.

Reaktionskräfte R_1 wirken und bezeichnet mit w_2 die Ordinaten der Biegungsfläche, welche allein durch deren Wirkung erzeugt wird, so ist wieder die Lösung unserer Aufgabe in der Gestalt $w = w_1 + w_2$ darstellbar, wenn die Kräfte R_1 (wie im Falle 1) so bestimmt werden, daß die resultierende Durchbiegung in entsprechenden Grenzgeraden verschwindet. Denn es befindet sich augenscheinlich jedes Plattenfeld unter denselben statischen Bedingungen wie die gegebene Platte von der Länge a und der Breite b.

In allen drei Fällen beruhen die Vorteile der geschilderten Lösungsmethode größtenteils darauf, daß sich die Reihen der Exponentialfunktionen von der Form $\sum_n e^{-k(na \pm x)}$ sehr leicht summieren lassen. Ich gewann auf diese Weise die Ausdrücke für w, welche sich in einigen Spezialfällen, die früher für isotrope Platten von anderen Verfassern erledigt wurden, durch bedeutend größere Einfachheit auszeichnen.

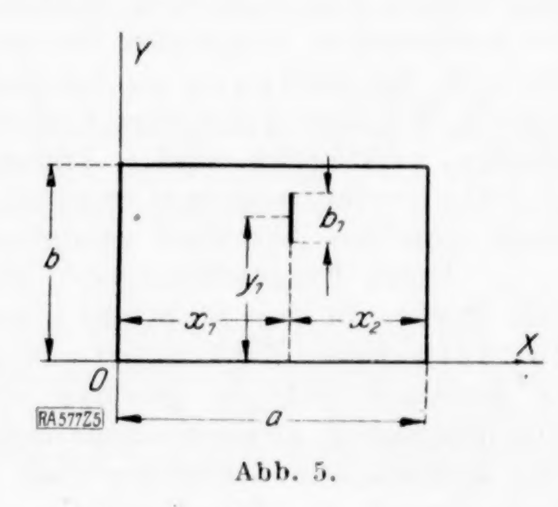


Abb. 5.

Als Beispiel möge die folgende Gleichung der Biegungsfläche bei gleichförmiger Linienbelastung $q' b_1$ der allseitig frei gestützten Platte nach Abb. 5 angeführt werden:

$$w = \frac{4\, q'\, b^4}{\pi^5 B_2 (\beta^2 - \alpha^2)} \sum_{n=1,2,3,\ldots} \frac{(n, b_1, y_1)}{n^4} \left(\beta \frac{Sh \frac{n x_2}{\beta}}{Sh \frac{n a}{\beta}} Sh \frac{n x}{\beta} - \alpha \frac{Sh \frac{n x_2}{\alpha}}{Sh \frac{n a}{\alpha}} Sh \frac{n x}{\alpha} \right) \sin \frac{n \pi y}{b} \quad . \quad (4).$$

Dieser Ausdruck gilt für $x \leq x_1 = a - x_2$ mit der abkürzenden Bezeichnung

$$(n, b_1\, y_1) = \sin \frac{n \pi}{2} \cdot \frac{b_1}{b} \cdot \sin \frac{n \pi y_1}{b}.$$

Für $x \geq x_1$ ist x_2 mit x_1 und x mit $(a - x)$ zu vertauschen. (Sh = Sinus hyp.)

Als zweites Beispiel diene noch die Gleichung der Biegungsfläche bei vollkommener Einspannung der beiden Y-Ränder unter einer von x unabhängigen Belastung $p(y)$. Sie lautet:

$$w = \frac{2\, b^3}{\pi^4 B_2} \sum_{n=1,2,3,\ldots} \frac{1}{n^4} \left[1 - \frac{1}{\beta_{an} - \alpha_{an}} \left(\alpha\, Sh \frac{n x}{\alpha} - \beta\, Sh \frac{n x}{\beta} - \alpha_{an}\, Ch \frac{n x}{\alpha} + \beta_{an}\, Ch \frac{n x}{\beta} \right) \right] \sin \frac{n \pi y}{b} \int_0^b p(y) \sin \frac{n \pi y}{b}\, dy \quad . \quad (5),$$

wobei $\alpha_{an} = \alpha\, Cth \frac{n a}{2 \alpha}$, $\beta_{an} = \beta\, Cth \frac{n a}{2 \beta}$ zur Abkürzung gesetzt ist.

(Ch = Cosinus hyp., Cth = Cotangens hyp.)

Zur asymptotischen Behandlung der stationären Lösungen im Turbulenzproblem.

Von F. NOETHER in Breslau.

1. Allgemeine Orientierung. Das Turbulenzproblem ist von einer wirklichen Lösung noch weit entfernt, trotz einiger vielleicht weitertragender Fragestellungen, die in der letzten Zeit Gegenstand der Untersuchung wurden. Ich denke hier einerseits an Messungen von Schiller[1]), die, im Anschluß an Prandtlsche Gedanken, die allmähliche Entstehung der Turbulenz, längs der »Anlaufstrecke« verfolgen. Andererseits sind die neueren Untersuchungen von Burgers[2]) und dessen Schüler v. d. Hegge-Zijnen zu nennen, die auf eine statistische Erfassung der turbulenten Strömung hinzielen, in Verbindung mit verfeinerten Messungen der Strömungsverteilung in der Nähe der Wand. Durch diese Untersuchungen ist das Interesse an der Turbulenzfrage etwas verschoben worden, indem sie weniger nach dem Uebergang von laminarer zu turbulenter Strömung, also dem Gebiet der »kritischen« Reynoldsschen Zahlen, als vielmehr nach dem Charakter der turbulenten Strömung selbst im Gebiete hoher Reynoldsscher Zahlen fragen. Zugleich steht hier nicht mehr wie früher die Stabilitätsfrage im Vordergrund, da es offen gelassen wird, ob sich die einzelnen Wirbel in der turbulenten Strömung entgegen der inneren Reibung durch Energieentnahme aus der Hauptströmung erhalten können, oder ob sie durch lokale äußere Einflüsse, wie Wandrauhigkeit, immer erneut erregt werden.

Trotzdem erscheint ein Zurückgreifen auf die früheren Fragen auch heute noch von Wichtigkeit. Wenn nämlich auch die neueren Ziele eine sozusagen axiomatische Möglichkeit der einzelnen Wirbel voraussetzen, die als gegebene »Elementarquanta« in die Rechnungen eingeführt werden, so bleibt doch die Frage bestehen, ob solche Elemente, die z. B. bei Burgers als Lorentzsche reibungslose Wirbel auftreten, mit den zwischen glatten Wänden geltenden hydrodynamischen Beziehungen, einschließlich der Reibungsglieder, verträglich sind. Andererseits sind auch vom Standpunkt der älteren Theorie so viele Fragen angeregt worden, die noch unbeantwortet sind, daß es sich wohl verlohnt, einen gewißen Abschluß wenigstens eines Teils dieser Probleme zu suchen,

Diese Fragestellungen[3]) kann man in zwei Gruppen einteilen: Die eine beschäftigt sich direkt mit der Stabilität einer gegebenen Strömungsverteilung bei hohen Werten der Reynoldsschen Zahl, wobei von der Reibung z. T. gänzlich abgesehen wurde (Rayleigh). Es ergaben sich so gewisse charakteristische Eigenschaften der Profilformen, die die Ueberlagerung anwachsender Schwingungen zuließen. Obgleich ein strenger Uebergang von hier zu dem wirklichen Fall der kleinen Reibung niemals ausgeführt wurde, hat man doch Grund zu der Annahme, daß wenigstens in einigen Fällen der so gefundenen Labilität auch bei Berücksichtigung der Reibung Realität zukommt. Aber gerade der eigentlich interessierende Fall von »schwingungsfähigen« Profilen, die bei sehr kleiner Reibung die Ueberlagerung stationärer, d. h. weder anwachsender, noch gedämpfter Schwingungen gestatten, würde einen strengeren mathemathischen Grenzübergang erfordern.

Die zweite Gruppe der Untersuchungen geht davon aus, daß bei kleiner Reynoldsscher Zahl (großer Reibung) sicher alle Profile stabil sind, wenn sie unter Wirkung äußerer Kräfte, etwa turbulenter Reibung, als im Gleichwewicht gegenüber der laminaren Reibung vorausgesetzt werden, und daß man daher zu anwachsenden Schwingungen nur durch einen gewissen Uebergangswert der Reynoldsschen Zahl hindurch gelangen kann, für den stationäre Schwingungen existieren. Zur Aufsuchung eines solchen Uebergangswertes muß natürlich von vornherein die Reibung in Rechnung gesetzt werden, und es wäre verfehlt, auch hier von den reibungslosen Untersuchungen auszugehen. Es handelt sich vielmehr um ein Eigenwertproblem, das zu der vollständigen hydrodynamischen Differentialgleichung 4ter Ordnung gehört.

Das nächste Ziel der folgenden Ausführungen[4]) war es, zu zeigen, daß der Umfang der bisherigen Untersuchungen auf diesem Gebiete wesentlich eingeschränkt werden kann.

[1]) Ztschr. f. ang. Math. u. Mech., Bd 2 (1922), S. 96 f.

[2]) Kön. Akad. d. Wiss., Amsterdam; Proc. XXVI, 7 u. 8; und Verhandl. I. Sekt. XIII, 3; 1924, sowie Dissert., Delft 1924.

[3]) Für die Literatur vgl. den Bericht des Verfassers: Ztschr. f. ang. Math. u. Mech, Bd. 1 (1921), S. 125 f.

[4]) Im wesentlichen vorgetragen auf der Jahresversammlung, Marburg 1923.

Diese benutzten nämlich fast durchweg asymptotische Mittel (z. B. Hopf, Blumenthal), ausgehend von dem Gesichtspunkt, daß die kritischen Reynoldsschen Zahlen große Werte haben. In noch näher zu präzisierender Weise ergibt sich aber, daß die asymptotische Verteilung der in Betracht kommenden »Eigenwerte« (nämlich der Uebergangswerte der Reynoldsschen Zahlen R) niemals die für wirkliche Wellen erforderliche Realitätseigenschaft hat. Daraus folgt, daß es ausreichend ist, die Untersuchung in einer allerdings nur von Fall zu Fall angebbaren Weise auf kleinere Eigenwerte zu beschränken und nur soweit fortzusetzen, bis die Annäherung an das angebbare asymptotische Verhalten erkennbar wird. Es fällt damit die Unsicherheit weg, die in der früher vermuteten Möglichkeit asymptotischer Lösungen lag und die eine asymptotische Untersuchung in jedem einzelnen Fall notwendig erscheinen ließ. (Vgl. ferner den Zusatz am Schlusse dieser Arbeit.)

2. Die Randwertaufgabe. Die Fragestellung ist in dem zitierten Bericht präzisiert (S. 129 f.). Sie nimmt folgende mathematische Gestalt an, wobei wir uns für alles Wesentliche auf den 2-dimensionalen Fall beschränken können. Im Koordinatensystem wird die x-Richtung parallel den Kanalwänden gelegt, die y-Richtung senkrecht dazu und zwar die Achse $y = 0$ in die Mitte zwischen den Wänden. Die zu Grunde gelegte laminare Strömungsverteilung ist gegeben durch eine Funktion $U(y)$, von der wir hier Stetigkeit und, soweit erforderlich, Differenzierbarkeit voraussetzen. (Der Fall von nur abteilungsweise stetigen Funktionen, den ich früher gelegentlich verwendet habe, ist damit allerdings formal ausgeschlossen; er würde aber nur einen Grenzübergang erfordern, der keinerlei prinzipielle Schwierigkeiten macht und an den Resultaten nichts ändert.) Im Falle der Strömung zwischen festen Wänden verschwindet U an beiden Wänden, im Falle relativ zu einander bewegter Wände nimmt U am Rande den Wert der Wandgeschwindigkeit an.

In der inkompressibeln Strömung werden nun Wellen gesucht, deren Geschwindigkeitskomponenten u, v nach der x- bzw. y-Richtung durch eine Stromfunktion $\Phi(x, y, t)$ gegeben sind, und die im Uebrigen im Sinne der Methode der kleinen Schwingungen als klein im Vergleich zu U vorausgesetzt werden. Für die harmonischen Partikularlösungen hat man dann zu setzen:

$$\Phi = \varphi(y)\, e^{i(\alpha x - \beta t)} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

und erhält aus den Stokesschen Grundgleichungen der Hydrodynamik für die Verteilungsfunktion $\varphi(y)$ folgende Aufgabe, die als das Turbulenzproblem im engeren Sinne bezeichnet sei: Es sei ϱ die Dichte, μ der Koeffizient der inneren Reibung der Flüssigkeit, $2b$ die Kanalbreite, $\varphi' = d\varphi/dy$ usw. Dann gilt im Gebiet $-b < y < +b$ die Differentialgleichung:

$$\mu(\varphi^{IV} - 2\alpha^2\varphi'' + \alpha^4\varphi) = i\varrho\{(\alpha U - \beta)(\varphi'' - \alpha^2\varphi) - \alpha U''\varphi\} \quad . \; . \; . \quad (2)$$

und ferner gelten die Randbedingungen:

$$\varphi = \varphi' = 0 \text{ für } y = \pm b \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2').$$

Die Aufgabe ist so zu denken, daß sie bei gegebener Konstanten α (reziproke Wellenlänge) und gegebener Verteilungsfunktion $U(y)$ für bestimmte, im Allgemeinen komplexe Werte β lösbar ist, und zwar sind die Wellen gedämpft, stationär oder anwachsend, je nachdem der Imaginärteil von β negativ, Null oder positiv ist. Für die gesuchten Uebergangsfälle muß also β rein reell sein, was wir weiterhin als zutreffend voraussetzen, so daß das Verhältnis $c = \beta/\alpha$ eine reine Fortpflanzungsgeschwindigkeit bedeutet. Es ist dann noch zweckmäßig, unbenannte Variable zu Grunde zu legen, indem man als Längeneinheit etwa die halbe Kanalbreite b, als Geschwindigkeitseinheit die mittlere, bzw. die Randgeschwindigkeit der Grundströmung, U_m, einführt und die Zeiteinheit aus beiden bestimmt. Nehmen wir diese Maßbestimmung schon durchgeführt an, so tritt in der Differentialgleichung die Reynoldssche Zahl: $R = \varrho\, U_m b/\mu$ auf, und zwar lautet sie dann:

$$\varphi^{IV} - 2\alpha^2\varphi'' + \alpha^4\varphi = i R\alpha\{(U - c)(\varphi'' - \alpha^2\varphi) - U''\varphi\} \quad . \; . \; . \; . \quad (3),$$

dazu

$$\varphi = \varphi' = 0 \text{ für } y = \pm 1 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3').$$

Natürlich sind jetzt auch die Größen U, α, c nach den neuen Einheiten gerechnet.

Da R seiner physikalischen Natur nach reell ist, so existieren stationäre Wellen nur, wenn (3), (3') durch reelle R und α lösbar ist. Es sei nun allgemein die in (3) vorkommende Größe $-iR\alpha = S$ gesetzt; so kann man sagen, daß, bei gegebenem α,

solche Fälle gesucht werden, in denen ein **rein imaginärer** Eigenwert S für die Aufgabe (3), (3') existiert.

3. Frühere Ergebnisse. Allgemeine Ansätze. Folgende Ergebnisse liegen über diese Fragestellung bereits vor:

a) Wenn $U(y)$ eine lineare Funktion ist, (Stabilitätsfrage der stationären Couette-schen Strömung nach Orr und Sommerfeld), so gibt es keine Lösung der gesuchten Art (v. Mises, Hopf).

b) Für den Fall $U(y) = y^3$, zugleich $\alpha^2 = c = 0$, der durch eine vom Verfasser erweiterte Fassung der Stabilitätsfrage angeregt war, existiert gleichfalls keine Lösung (Blumenthal).

c) In dem Falle einer geraden, unstetigen Funktion $U(y)$, die abteilungsweise die Werte 0 und 1 annimmt, wies der Verfasser durch einfache Rechnungen die Möglichkeit einer Lösung mit rein imaginärem S nach, wobei entweder die Größe c oder die Lage der Unstetigkeit geeignet gewählt wurde.

Für die allgemeine Untersuchung sind zunächst folgende Formulierungen von Vorteil: Es sei identisch gesetzt:

$$L(\varphi) \equiv \varphi^{IV} - 2\alpha^2\varphi'' + \alpha^4\varphi + S\{(U-c)(\varphi'' - \alpha^2\varphi) - U''\varphi\} \quad . \; . \; . \quad (4).$$

Wenn die Gl. (3): $L(\varphi) = 0$ mit den Randbedingungen (3') eine Lösung mit rein imaginärem S zuläßt, so existiert auch die konjugierte Lösung $\bar{\varphi}$ zu dem konjugierten Eigenwert $\bar{S} = -S$. Die konjugierte Form sei als $\bar{L}(\bar{\varphi})$ bezeichnet. Dann ergibt sich durch partielle Integrationen, unter Benützung der Randbedingungen:

$$O = \int_{-1}^{+1} [\bar{\varphi}\, L(\varphi) - \varphi\, \bar{L}(\bar{\varphi})]\, dy = -S \int_{-1}^{+1} \{2(U-c)\,\varphi'\bar{\varphi}' + [\alpha^2(U-c) + U'']\,\varphi\bar{\varphi}\}\, dy \quad (5).$$

Hierin ist sowohl $\varphi'\bar{\varphi}'$ als auch $\varphi\bar{\varphi}$ überall positiv reell. Sei nun etwa U als gerade, überall konvexe Funktion ($U'' < 0$) angenommen, so wären alle Glieder auf der rechten Seite von (5) positiv, falls c größer als der Maximalwert von U wäre, und daher könnte (5) nicht erfüllt sein. Die **Wellengeschwindigkeit** kann also **nicht größer** als die **maximale Strömungsgeschwindigkeit** sein. Wenn U aber eine ungerade Funktion ist, läßt sich ein ähnlicher Schluß nicht direkt ziehen, außer im Fall $U'' = 0$. Es zeigt sich aber zugleich in jedem Falle die entscheidende Bedeutung eines **Vorzeichenwechsels** in dem Faktor $U - c$ für die Untersuchung über die Möglichkeit von Lösungen der geforderten Art. In der Tat sind die Schwierigkeiten aller Untersuchungen hauptsächlich darin begründet, daß man eine Verschwindungsstelle des Faktors $U - c$ im Integrationsgebiet zwischen $y = \pm 1$ annehmen muß. Hier versagen die asymptotischen Darstellungen, und dieser Umstand machte die Aufstellung komplizierter »Uebergangssubstitutionen« zwischen den partikulären Integralen notwendig, die überdies von der speziellen Funktion $U(y)$ wesentlich abhängig und nur in Ausnahmefällen aufstellbar sind[1]).

Ein zweiter Umstand, der allgemeine Aussagen erschwert, der aber die Möglichkeit von Lösungen mit imaginärem S überhaupt erst ins Auge fassen läßt, ist der, daß die Form $L(\varphi)$ **nicht selbstadjungiert** ist. Ihre adjungierte Form lautet:

$$M(\psi) \equiv \psi^{IV} - 2\alpha^2\psi'' + \alpha^4\psi + S\{(U-c)(\psi'' - \alpha^2\psi) + 2U'\psi'\} \quad . \; . \quad (6).$$

Denn setzt man

$$A(\varphi) \equiv \varphi^{IV} - 2\alpha^2\varphi'' + \alpha^4\varphi \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (7)$$

$$B(\varphi) \equiv (U-c)(\varphi'' - \alpha^2\varphi) - U''\varphi \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (8)$$

$$B^*(\varphi) \equiv (U-c)(\varphi'' - \alpha^2\varphi) + 2U'\varphi' \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (8'),$$

so folgt mittels der Randbedingungen (3'), die auch für ψ anzunehmen sind, durch partielle Integrationen:

$$\int_{-1}^{+1} [\psi A(\varphi) - \varphi A(\psi)]\, dy = \Big| (\varphi'''\psi - \psi'''\varphi) - (\varphi''\psi' - \psi''\varphi') - 2\alpha^2(\varphi'\psi - \psi'\varphi) \Big|_{-1}^{+1} = 0 \quad (9)$$

$$\int_{-1}^{+1} [\psi B(\varphi) - \varphi B^*(\psi)]\, dy = \Big| (U-c)(\psi\varphi' - \varphi\psi') - U'\varphi\psi \Big|_{-1}^{+1} = 0 \quad . \; . \; . \quad (9'),$$

---

[1]) Ueber den Versuch W. Heisenbergs, diese Schwierigkeit zu umgehen, siehe eine Bemerkung auf S. 242.

d. h. $A(\varphi)$ ist eine selbstadjungierte Form, $B(\varphi)$ und $B^*(\psi)$ sind zu einander adjungierte Formen.

Die mathematischen Schwierigkeiten, die vom Zusammentreffen dieser beiden Umstände herrühren, lassen sich nun, wie mir scheint, auf ein Minimum reduzieren durch eine geeignete schrittweise Anordnung der Untersuchung. Sie liegt darin, daß wir ausgehen von einer mit der vorliegenden Aufgabe zusammenhängenden, aber selbstadjungierten Aufgabe, für die es nicht schwer ist, die asymptotische Verteilung der Eigenwerte explizit anzugeben. Der zweite Schritt ist dann der Uebergang zu der wirklichen Eigenwertverteilung.

Die gedachte Zerlegung ist der bekannten Zerlegung unsymmetrischer Tensoren in einen »symmetrischen« und einen »schiefsymmetrischen« Teil entsprechend. Es soll nämlich eine Zerlegung

$$B(\varphi) = P(\varphi) - Q(\varphi) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (10),$$

so vorgenommen werden, daß $P(\varphi)$ eine selbstadjungierte Form ist, und daß die adjungierte Form zu $Q(\varphi)$ sich nur durch das Vorzeichen von $Q(\varphi)$ unterscheidet, also $-Q(\varphi)$ lautet. Eine solche Form $Q(\varphi)$ heiße »gegenadjungiert«. Die adjungierte Form zu $B(\varphi)$ wird also

$$B^*(\varphi) = P(\varphi) + Q(\varphi) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (10').$$

Aus (10) und (10') erhält man:

$$P(\varphi) = {}^1\!/_2\,[B(\varphi) + B^*(\varphi)] = (U-c)(\varphi'' - \alpha^2\varphi) + U'\varphi' - \frac{U''}{2}\varphi \quad . \quad (11)$$

$$Q(\varphi) = {}^1\!/_2\,[-B(\varphi) + B^*(\varphi)] = U'\varphi' + \frac{U''}{2}\varphi \quad \ldots \ldots \ldots \quad (11').$$

Die beiden Differentialgleichungen lauten nach Einführung dieser Bezeichnungen:

$$L(\varphi) = A(\varphi) + S\,[P(\varphi) - Q(\varphi)] = 0 \quad \ldots \ldots \quad (12)$$

$$M(\psi) = A(\psi) + S\,[P(\psi) + Q(\psi)] = 0 \quad \ldots \ldots \quad (12').$$

4. Allgemeine Sätze über die Eigenwerte. Wir knüpfen weiterhin an die Formen (12), (12') der Differentialgleichungen an und betrachten dabei zunächst P und Q als beliebige selbst- bzw. gegenadjungierte Form. Es gelten also neben (9) auch noch die Gleichungen

$$\int_{-1}^{+1} \{\psi P(\varphi) - \varphi P(\psi)\}\, dy = 0 \qquad \int_{-1}^{+1} \{\psi Q(\varphi) + \varphi Q(\psi)\}\, dy = 0 \quad . \quad . \quad (13)$$

für beliebige Funktionen φ, ψ, die den Randbedingungen genügen. Da die Eigenwerte S im Allgemeinen als komplex vorausgesetzt werden müssen, sei $S = r + is$ und der konjugierte Eigenwert $\bar{S} = r - is$ gesetzt, $\bar{\varphi}$ die zu $\bar{S}$ gehörige konjugierte Eigenfunktion. Dann ist

$$\left.\begin{aligned} &A(\varphi) + (r+is)\,[P(\varphi) - Q(\varphi)] = 0; \qquad \varphi(\pm 1) = \varphi'(\pm 1) = 0 \\ &A(\bar\varphi) + (r-is)\,[P(\bar\varphi) - Q(\bar\varphi)] = 0; \qquad \bar\varphi(\pm 1) = \bar\varphi'(\pm 1) = 0 \end{aligned}\right\} \quad . \quad (14)$$

und folglich nach (9), (13):

$$O = is\int_{-1}^{+1} \{\bar\varphi P(\varphi) + \varphi P(\bar\varphi)\}\, dy + r\int_{-1}^{+1} \{\bar\varphi Q(\varphi) - \varphi Q(\bar\varphi)\}\, dy \quad . \quad . \quad . \quad (15).$$

Analog zu (9) bilden wir ferner noch durch partielle Integrationen

$$\int_{-1}^{+1} \{\bar\varphi A(\varphi) + \varphi A(\bar\varphi)\}\, dy = 2\cdot\int_{-1}^{+1} (\varphi''\bar\varphi'' + 2\alpha^2\varphi'\bar\varphi' + \alpha^4\varphi\bar\varphi)\, dy \quad . \quad . \quad . \quad (16).$$

Das Integral auf der rechten Seite ist hier ersichtlich ein wesentlich positiver Wert, der mit $+J$ bezeichnet sei, und folglich ergibt das Einsetzen von (14) in (16) unter Berücksichtigung von (13):

$$+2J = -r\int_{-1}^{+1} \{\bar\varphi P(\varphi) + \varphi P(\bar\varphi)\}\, dy + is\int_{-1}^{+1} \{\bar\varphi Q(\varphi) - \varphi Q(\bar\varphi)\}\, dy \quad . \quad . \quad (17).$$

Die in (15), (17) auf der rechten Seite vorkommenden Integrale haben in unserem speziellen Fall die Bedeutung

$$\left.\begin{aligned} 2\mathfrak{P} &= \int_{-1}^{+1} \{\varphi\, P(\bar\varphi) + \bar\varphi\, P(\varphi)\}\, dy = -2\int_{-1}^{+1}\left\{(U-c)\,\varphi'\,\bar\varphi' + \left[\alpha^2(U-c) + \frac{U''}{2}\right]\varphi\,\bar\varphi\right\}dy \\ 2\mathfrak{Q} &= \int_{-1}^{+1} \{\varphi\, Q(\bar\varphi) - \bar\varphi\, Q(\varphi)\}\, dy = \int_{-1}^{+1} U'(\bar\varphi'\varphi - \varphi'\bar\varphi)\, dy \end{aligned}\right\} \quad (18).$$

Ueber ihr Vorzeichen läßt sich aber weder allgemein, noch in diesem speziellen Falle etwas aussagen, und deshalb lassen sich auch keine allgemeinen Schlüsse über r und s aus (15), (17) ziehen. Nur über 2 wichtige Grenzfälle geben sie Auskunft:

a) Wenn $B(\varphi)$ selbst-adjungiert, d. h. $Q(\varphi) \equiv 0$ ist, so ist auch $\mathfrak{Q} = 0$. Da J nicht verschwindet, so kann nach (17) jetzt $\mathfrak{P}$ nicht 0 sein; also folgt aus (15): $s = 0$; d. h. im selbstadjungierten Fall sind alle Eigenwerte reell.

b) Wenn $B(\varphi)$ gegen-adjungiert, d. h. $P(\varphi) \equiv 0$ ist, so ist auch $\mathfrak{P} = 0$. Nach (17) kann jetzt $\mathfrak{Q}$ nicht 0 sein, also folgt aus (15): $r = 0$; d. h. im gegenadjungierten Fall sind alle Eigenwerte rein imaginär.

Der bei uns vorliegende wirkliche Fall liegt offenbar zwischen diesen beiden Grenzfällen, und man kann die zu beantwortende Frage allgemein so formulieren, welchem von beiden er näher kommt. Aus (15) folgt für die Möglichkeit rein imaginärer Eigenwerte ($r = 0$) die schon früher abgeleitete Bedingung (5) in der allgemeinen Form $\mathfrak{P} = 0$.

Uebrigens hat die gegenadjungierte Aufgabe eine direkte Bedeutung für unsere Fragestellung, sie gibt eine untere[1]) Grenze der möglichen rein imaginären Eigenwerte von (14). Denn wenn man $r = 0$ annimmt, so ist nach (17)

$$+J = +is\,\mathfrak{Q}.$$

Das Variationsprinzip, das Integral $\mathfrak{Q}$ möglichst groß zu machen, wenn φ so normiert ist, daß $J = 1$ wird und die Randbedingungen (3') erfüllt sind, ergibt also eine untere Grenze für s. Als Differentialgleichung zu dieser, von P unabhängigen Variationsaufgabe ergibt sich die gegenadjungierte Gleichung:

$$A(\varphi) + is\, Q(\varphi) = 0,$$

deren kleinster Eigenwert (mit den Randbedingungen) die gesuchte untere Grenze liefert. Wenn also die Aufgabe (14) überhaupt rein imaginäre Eigenwerte besitzt, so gibt es für diese eine von der Form P unabhängige untere Grenze, die im Falle $P \equiv 0$ wirklich erreicht wird.

Die obige Variationsaufgabe stimmt mit der von Orr und Hamel (vgl. den zitierten Bericht, S. 132) im speziellen Falle auf anderem Wege abgeleiteten überein.

5. Selbstadjungierte Hilfsgleichung. Normierung und Orthogonalitätsbeziehungen. Die Ausführungen der Nr. 4 weisen auf den Weg, auf dem man sich ein Bild über die wahre Verteilung der Eigenwerte unserer Aufgabe machen kann. Es ist zwar nicht allgemein anzugeben, welche Lage die Aufgabe zwischen den beiden Grenzfällen hat, wohl aber ist dies für die asymptotische Verteilung der Eigenwerte möglich, (asymptotisch im Sinne der Anordnung nach wachsendem Absolutbetrag zu verstehen). Und zwar wird sich folgender Satz ergeben: Asymptotisch überwiegt in (12) der selbstadjungierte Teil $P(\varphi)$ über den gegenadjungierten Teil $Q(\varphi)$. Die asymptotische Eigenwertverteilung ist daher reell oder nähert sich wenigstens der reellen Achse an. Der innere Grund dieses Verhaltens ist einfach der, daß in $P(\varphi)$ nach (11) der zweite Differentialquotient vorkommt, während $Q(\varphi)$ nach (11') nur den ersten Differentialquotienten enthält. Das Umgekehrte wäre der Fall, wenn auch ein Glied mit φ''' vorkäme, das ein Ueberwiegen von $Q(\varphi)$, also eine asymptotisch imaginäre Verteilung herbeiführen würde.

Um dies näher zu begründen, ist zunächst die Diskussion der selbst-adjungierten Hilfsgleichung erforderlich, die man aus (12) durch Fortlassung des gegenadjungierten Teiles Q erhält. Deren Eigenwerte, die λ heißen sollen, sind nach Satz a) in Nr. 4 sämtlich reell. Die Hilfsfunktionen sollen χ heißen. Dann ist also:

$$N(\chi) = A(\chi) + \lambda P(\chi) = 0, \qquad \chi(\pm 1) = \chi'(\pm 1) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19).$$

Aus (19) erhält man

$$\int_{-1}^{+1} \bar\chi\, A(\chi)\, dy = -\lambda \int_{-1}^{+1} \bar\chi\, P(\chi)\, dy,$$

[1]) Unter der Annahme daß $Q(\varphi)$ ein Differentialausdruck von niedriger Ordnung ist, als $A(\varphi)$.

oder im speziellen Fall mittels (7), (11) nach partieller Integration:

$$\int_{-1}^{+1}(\chi''^2 + 2\alpha^2\chi'^2 + \alpha^4\chi^2)\,dy = \lambda\int_{-1}^{+1}\left\{(U-c)\,\chi'^2 + \left[\alpha^2(U-c) + \frac{U''}{2}\right]\chi^2\right\}dy \quad (20).$$

Das Integral auf der linken Seite stimmt, da χ jetzt reell ist, mit dem früher $+J(\chi)$ genannten positiven Integral überein, das auf der rechten Seite mit $-\mathfrak{P}(\chi)$ und kann positiv oder negativ sein. Die Normierung der Eigenfunktionen χ soll nun so erfolgen, daß das Integral

$$-\mathfrak{P}(\chi) = -\int_{-1}^{+1}\chi P(\chi)\,dy = \int_{-1}^{+1}\left\{(U-c)\,\chi'^2 + \left[\alpha^2(U-c) + \frac{U''}{2}\right]\chi^2\right\}dy = \pm 1 \quad (21),$$

je nachdem, ob das Integral positiv oder negativ ist, und ebenso ist dann das Vorzeichen des betreffenden Eigenwerts nach (20) positiv oder negativ. Das wesentlich positive Integral J nimmt damit den Wert an:

$$J(\chi) = \int(\chi''^2 + 2\alpha^2\chi'^2 + \alpha^4\chi^2)\,dy = |\lambda| \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (21').$$

Wir bezeichnen die positiven Eigenwerte mit $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, die negativen mit $\lambda_{-1}, \lambda_{-2}, \lambda_{-3}$ . .

Zwischen 2 zu verschiedenen Eigenwerten λ_m, λ_n gehörigen Eigenfunktionen bestehen die allgemeinen Beziehungen (9), (13):

$$\int_{-1}^{+1}(\chi_m A(\chi_n) - \chi_n A(\chi_m))\,dy = 0\,; \qquad \int_{-1}^{+1}[\chi_m P(\chi_n) - \chi_n P(\chi_m)]\,dy = 0.$$

Durch Berücksichtigung der Differentialgleichungen:

$$A(\chi_m) + \lambda_m P(\chi_m) = 0, \qquad A(\chi_n) + \lambda_n P(\chi_n) = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; (22)$$

folgt daraus, da $\lambda_n \neq \lambda_m$ vorausgesetzt ist:

$$\int_{-1}^{+1}\chi_n P(\chi_m)\,dy = 0, \qquad \int_{-1}^{+1}\chi_m P(\chi_n)\,dy = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (23)$$

oder auch:

$$\int_{-1}^{+1}\chi_n A(\chi_m)\,dy = 0, \qquad \int_{-1}^{+1}\chi_m A(\chi_n)\,dy = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (23')$$

als verschiedene Formen der Orthogonalitätsbedingungen des Systems der Eigenfunktionen. Sie nehmen im speziellen, nach partieller Integration, die symmetrische Form an:

$$\int_{-1}^{+1}\left\{(U-c)\,\chi_m'\chi_n' + \left[\alpha^2(U-c) + \frac{U''}{2}\right]\chi_m\chi_n\right\}dy = 0 \quad . \; . \; . \; . \; (23'')$$

bzw.

$$\int_{-1}^{+1}(\chi_m''\chi_n'' + 2\alpha^2\chi_m'\chi_n' + \alpha^4\chi_m\chi_n)\,dy = 0$$

Die so definierten Eigenfunktionen bilden nach allgemeinen Sätzen[1]) ein »vollständiges polares Funktionensystem«, d. h. es gibt keine stetige, differenzierbare, den Randbedingungen $f(\pm 1) = f'(\pm 1) = 0$ genügende Funktion $f(y)$, die zu allen Eigenfunktionen die Orthogonalitätsbedingung in einer der obigen Formen, z. B.

$$\int_{-1}^{+1} f \cdot P(\chi)\,dy = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (23\,a)$$

erfüllte.

6. Allgemeine Form der determinierenden Gleichung für die Eigenwerte S.

Wir nehmen jetzt das System der Funktionen χ_m als gegeben an. Um zu der eigentlichen Aufgabe, der Bestimmung der Funktionen φ, überzugehen, verwenden wir den Satz (Hilbert l. c.), daß sich jede der Funktionen φ in eine Reihe mittels des polaren Funktionensystems der χ_m entwickeln läßt. Es sei also gesetzt:

$$\varphi(y) = C_1\chi_1 + C_{-1}\chi_{-1} + C_2\chi_2 + C_{-2}\chi_{-2} + \ldots\ldots\ldots \quad (24).$$

[1]) Hilbert: Grundzüge einer allg. Theorie d. lin. Integralgleichungen, Kapitel XV, XVI

wodurch die Randbedingungen für φ von selbst erfüllt sind. Die Differentialgleichung in der Form (12) ergibt jetzt:

$$\sum_{1}^{\infty}{}^{m}_{-m}\, C_m \{A(\chi_m) + S[P(\chi_m) - Q(\chi_m)]\} = 0$$

und daraus entsteht mittels der für χ_m gültigen Differentialgleichung (22):

$$\sum_{1}^{\infty}{}^{m}_{-m}\, C_m \{(\lambda_m - S)\, P(\chi_m) + S\, Q(\chi_m)\} = 0.$$

Um nun zu Gleichungen für die Koeffizienten C_m zu kommen, multiplizieren wir diese Differentialgleichungen je mit einer der Funktionen χ_m und integrieren dann von -1 bis $+1$. Dabei beachten wir die Normierung der χ_n nach (21) und die Orthogonalitätsbeziehungen (23) und setzen ferner

$$q_{mn} = \int_{-1}^{+1} \chi_n Q(\chi_m)\, dy\,; \qquad q_{nm} = \int_{-1}^{+1} \chi_n Q(\chi_m)\, dy \quad \ldots\ldots \quad (25).$$

Wegen des gegenadjungierten Charakters von $Q(\chi)$ ist also nach (13):

$$q_{nm} = -\, q_{mn}, \qquad q_{mm} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (25'),$$

d. h. die Größen q_{mn} bilden einen schiefsymmetrischen Tensor. Es ergibt sich somit ein System von unendlich vielen linearen Gleichungen für die Unbekannten C_m, von denen die zum Index n gehörige lautet:

$$C_n (S - \lambda_n)\, \varepsilon_n + S \sum_{1}^{\infty}{}^{m}_{-m}\, q_{nm}\, C_m = 0 \quad \ldots\ldots \quad (26).$$

Der Faktor ε_n ist hier $+1$ oder -1, je nachdem n positiv oder negativ ist.

Damit findet man für S die determinierende Gleichung in Gestalt einer unendlichen Determinante D, die wir in folgender Form und Anordnung schreiben können:

$$D = \begin{vmatrix} \left(\frac{S}{\lambda_1} - 1\right) & \frac{S}{\lambda_1} q_{1,-1} & \frac{S}{\lambda_1} q_{1,2} & \frac{S}{\lambda_1} q_{1,-2} & \cdots \\ \frac{S}{\lambda_{-1}} q_{-1,1} & -\left(\frac{S}{\lambda_{-1}} - 1\right) & \frac{S}{\lambda_{-1}} q_{-1,2} & \frac{S}{\lambda_{-1}} q_{-1,-2} & \cdots \\ \frac{S}{\lambda_2} q_{2,1} & \frac{S}{\lambda_2} q_{2,-1} & \left(\frac{S}{\lambda_2} - 1\right) & \frac{S}{\lambda_2} q_{2,-2} & \cdots \\ \frac{S}{\lambda_{-2}} q_{-2,1} & \frac{S}{\lambda_{-2}} q_{-2,-1} & \frac{S}{\lambda_{-2}} q_{-2,2} & -\left(\frac{S}{\lambda_{-2}} - 1\right) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots \end{vmatrix} = 0 \quad . \quad (27)$$

Der Bau der Determinante D ist durchsichtig; sie setzt sich aus den Diagonalgliedern und der schiefsymmetrischen Determinante der q_{mn} zusammen, wobei in der n-ten Reihe zu jedem q noch der Faktor S/λ_n hinzukommt. Daß die Determinante in dieser Form für alle S konvergiert, ergibt sich aus den nachfolgenden asymptotischen Abschätzungen.

7. Extremaleigenschaften der Hilfsfunktionen χ. Asymptotische Verteilung der Eigenwerte λ. Die Determinante D stellt entwickelt eine Potenzreihe in S dar. Solche Potenzreihen für die determinierende Gleichung lassen sich in manchen Fällen auch auf anderen Wegen finden und sind dann geeignet, um kleinere Eigenwerte durch Näherungsberechnung zu finden. Dagegen ist die Determinantenform der Gleichung gerade für die asymptotische Abschätzung der großen Eigenwerte angemessen, wenn man die asymptotischen Eigenschaften der Eigenwerte λ_n und der Koeffizienten q kennt.

Zu dem Zweck kann man von den Normierungen und Orthogonalitätsbeziehnungen der Nr. 5 ausgehen und folgende bekannten Extremaleigenschaften der Eigenwerte λ und Eigenfunktionen χ in Betracht ziehen:

a) Der kleinste positive bzw. negative Eigenwert $\lambda_{\pm 1}$ ist nach (21') seinem Betrage nach der kleinste Wert, den das Integral $J(\chi)$ annehmen kann, wenn die Nebenbedingung (21): $\mathfrak{P}(\chi) = +1$ bzw. -1 erfüllt ist. Zum Vergleich sind dabei alle stetigen, 4 mal differenzierbaren Funktionen zugelassen, die die Randbedingungen in (19) erfüllen.

b) Die höheren Eigenwerte und -funktionen ergeben sich dann aus den nämlichen Eigenschaften, je unter Hinzufügung der Orthogonalität gemäß (23) zu allen vorangehenden Eigenfunktionen von gleichem Vorzeichen des Index. Da diese Bedingungen schon zu der Differentialgleichung (9) führen, ist damit die Orthogonalität zu den Eigenfunktionen von entgegengesetztem Vorzeichen des Index von selbst gewährleistet.

c) Man kann schließlich im Anschluß an R. Courant[1]) die höheren Eigenwerte auch independent von den vorangehenden definieren: Der $n$te positive bzw. negative Eigenwert ist seinem Betrage nach der größte Wert, den das Minimum von $J(\chi)$ annimmt unter der Nebenbedingung $\mathfrak{P}(\chi) = +1$ bzw. -1 und $n-1$ weiteren in χ linearen Nebenbedingungen, die nun selbst in ihrer Form beliebig zu variieren sind.

Die Eigenschaft c) liefert nach Courant die asymptotische Verteilung der Eigenwerte λ[2]). Man kann nämlich, von der Maximum-Minimum-Definition ausgehend, die gesuchten Eigenwerte in Vergleich setzen mit den Eigenwerten vereinfachter Aufgaben, die man erhält, indem man erstens das ganze Intervall von -1 bis $+1$ einteilt in eine Anzahl Teilintervalle; zweitens in jedem Teilintervall die Koeffizienten in $\mathfrak{P}(\chi)$, nämlich $U-c$ und U'', durch größere oder kleinere Konstanten ersetzt; und drittens die Stetigkeit an den Grenzen der Teilintervalle aufhebt und hier durch Randbedingungen ersetzt, die eine stärkere oder schwächere Bindung bedeuten. Für den Betrag der Eigenwerte erhält man auf diese Weise obere und untere Grenzen. Dabei bedingt nur der Vorzeichenwechsel von $U-c$ eine kleine Modifikation. Die Bestimmung einer unteren Grenze für die positiven Eigenwerte erfordert nämlich eine Vergrößerung von $U-c$, solange diese Größe positiv ist, dagegen eine Verkleinerung des Betrages, soweit die Größe negativ ist. Man kann dann im letzteren Gebiet $U-c$ durch die Konstante o ersetzen und analog bei der Bestimmung der negativen λ im positiven Bereich von $U-c$.

Man erhält so für den $n$ten positiven Eigenwert λ_{+n} die asymptotische Formel (das Zeichen $\simeq$ bedeutet asymptotische Annäherung mit wachsendem Index n):

$$\sqrt{\lambda_n} \simeq \frac{\pi n}{\int\limits_{+} \sqrt{U-c}\, dy} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (28)$$

und für den n-ten negativen Eigenwert λ_{-n}:

$$\sqrt{-\lambda_{-n}} \simeq \frac{\pi n}{\int\limits_{-} \sqrt{c-U}\, dy} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (28')$$

$\int\limits_{+}$ und $\int\limits_{-}$ soll hier andeuten, daß jeweils nur über den Bereich zu integrieren ist, in dem $U-c$ positiv bzw. negativ ist. Die asymptotische Verteilung ergibt also sowohl für die positiven, als auch für die negativen Eigenwerte die Quadrate einer harmonischen Zahlenreihe, aber mit verschiedenem Intervallbetrag in beiden Fällen.

8. Der asymptotische Charakter der Hilfsfunktionen χ. Wir unterscheiden sowohl für die positiven als auch für die negativen Eigenwerte λ je ein Hauptgebiet und ein Nebengebiet des Intervalls y von -1 bis $+1$; das erstere ist dadurch bestimmt, das $\lambda(U-c)$ positiv ist, im letzteren ist $\lambda(U-c)$ negativ. Die vier partikulären Integrale der Differentialgleichung

$$A(\chi) + \lambda P(\chi) = \chi^{IV} - 2\alpha^2\chi'' + \alpha^4\chi + \lambda\left\{(U-c)(\chi'' - \alpha^2\chi) + U'\chi' - \frac{U''}{2}\chi\right\} = 0 \quad (19)$$

zerfallen mit asymptotisch wachsendem λ in jedem der Teilintervalle in zwei Paare von je zwei Integralen. Die zwei ersten davon nähern sich asymptotisch den Lösungen der Differentialgleichung 2ter Ordnung: $P(\chi) = 0$, die man durch Nullsetzen des Faktors von λ in (19) erhält, und können aus diesen durch eine Entwicklung nach fallenden Potenzen von λ abgeleitet werden. Sie sollen »langsame Lösungen« heißen. Die anderen beiden nähern sich asymptotisch zwei rasch veränderlichen Lösungen der Gleichungen

$$\chi^{IV} + \lambda(U-c)\chi'' = 0$$

und werden aus diesen durch eine asymptotische Entwicklung gewonnen. Sie haben rasch oscillatorischen Charakter im Hauptgebiet, dagegen exponentiellen Charakter im Nebengebiet und mögen »rasche Lösungen« heißen.

[1]) Ztschr. f. ang. Math. u. Mech., Bd 2 (1922), S. 278 f. Siehe auch dessen Buch: Methoden der mathematischen Physik I (Springer 1924), S. 115 f.

[2]) Die Einzelheiten der Abschätzung können hier wie im Folgenden nur mehr ihrem Sinne nach mitgeteilt werden, ohne vollständige Durchführung in der üblichen Form der mathematischen Technik.

In welcher Weise beim Durchgang durch die Stellen $U - c = 0$ diese Partikularlösungen sich gegenseitig substituieren (Uebergangssubstitutionen), kann nicht allgemein erörtert werden. Doch kann man über die Eigenfunktionen χ_n selbst, die aus den Partikularlösungen zusammengesetzt sind, ausreichende Angaben auf Grund der definierenden Eigenschaften a), b) in Nr. 7 und der Beziehungen von Nr. 5 machen.

a) Das Integral $\mathfrak{P}(\chi) = \pm 1$ setzt sich in jedem Fall wegen des Vorzeichenwechels von $U - c$ nach (21) aus positiven und negativen Teilen zusammen. Es ist aber nicht möglich, daß etwa die positiven und negativen Teile des Integrals für sich mit wachsendem n zu unendlich gehen, und nur ihre Differenz endlich bliebe. Denn dann könnte man durch geringe Variationen der Funktion χ_n, unter Beibehaltung der Nebenbedingungen, solche Funktionen χ^* bilden, bei denen sich positiver und negativer Anteil nicht mehr aufheben, für die also $\mathfrak{P}(\chi^*)$ zu unendlich gehen würde. Durch proportionale Verkleinerung läßt sich wieder $\mathfrak{P}(\chi^*) = \pm 1$ herstellen, aber dann würde damit $J(\chi^*)$ kleiner als $J(\chi)$, im Widerspruch zur Minimumdefinition b) von Nr. 7. Es folgt also der Satz: In dem Integral $\mathfrak{P}(\chi) = \pm 1$ ist der vom Hauptgebiet herrührende Anteil für sich endlich (wir sagen: von der Ordnung 1), nicht nur die Differenz der vom Hauptgebiet und Nebengebiet herrührenden Anteile. Insbesondere folgt daraus, daß die im Nebengebiet vorkommenden raschen Partikularlösungen von exponentiellem Charakter mit wachsendem n nicht exponentiell zu ∞ anwachsen können, sondern nur von einem endlichen Maximalwert ab exponentiell zu 0 abnehmen können.

b) Es muß weiterhin asymptotisch der Anteil der langsamen zu den raschen Partikularlösungen abgeschätzt werden, wobei man sich, wegen Satz a), auf das Hauptgebiet beschränken kann.

Durch das Zeichen $\sim$ sei nur die Gleichheit der asymptotischen Größenordnung ausgedrückt, und es bezeichne χ_r den raschen und χ_l den langsamen Anteil der Eigenlösung vom Index n. Dann ist folgendes Verhältnis der Größenordnungen charakteristisch:

$$\chi_r' \sim n\,\chi_r' \quad \text{dagegen} \quad \chi_l' \sim \chi_l \qquad \ldots \ldots \quad (29).$$

Wenn nun einer der Ränder $y = \pm 1$ in das Hauptgebiet fällt, so muß wegen der Randbedingung $\chi = \chi_r + \chi_l = 0$ im Allgemeinen die asymptotische Ordnung $\chi_l \sim \chi_r$ bestehen. Dann ist aber wegen (29) $\chi_r' \sim n\,\chi_l'$, und dies in Verbindung mit der Normierung in der Form (21) ergibt:

$$\chi_r' \sim 1, \qquad \chi_l' \sim 1/n, \qquad \chi_r \sim \chi_l \sim 1/n \qquad \ldots \ldots \quad (30)$$

als den allgemeinen Fall. In besonderen Fällen könnte auch χ_l von geringerer Ordnung sein.

Dagegen kann χ_l nicht von größerer Ordnung werden; denn dies könnte nur eintreten, wenn die Randbedingung $\chi_l = 0$ allein erfüllt wäre, und zwar für die asymptotische Reihe der Eigenfunktionen. Unter dieser Voraussetzung würden sich aber alle Eigenfunktionen asymptotisch der nämlichen Funktion annähern, da die asymptotische Form der χ_l von λ unabhängig ist. Diese Funktion müßte zu allen im Index vorangehenden Eigenfunktionen χ, d. h. zu allen Eigenfunktionen des Systems, die Orthogonalitätsbedingung im Sinne der Gl. (23a) erfüllen, im Widerspruch zur Vollständigkeit des Systems.

Der letztere Schluß auf die Unmöglichkeit des asymptotischen Ueberwiegens von χ_l gilt mit unwesentlicher Modifikation auch dann, wenn keiner der Ränder $y = \pm 1$ ins Hauptgebiet fällt. Also müssen in allen Fällen die asymptotischen Ordnungen nach (30) bestehen. Im Hauptgebiet haben dann der rasche Anteil χ_r und der langsame Anteil χ_l die Formen:

$$\chi_l \sim \frac{1}{n}\,; \qquad \chi_r \sim \frac{1}{n} \sin n \sqrt{|\lambda_n (U - c)|}\, y\,; \qquad \lambda_n \sim n^2 \qquad \ldots \ldots \quad (31).$$

9. Abschätzung der Größen q_{nm}. Nach Gl. (25') ist $q_{nm} = - q_{mn}$. Also kann man auch setzen

$$q_{nm} = {}^1/_2 (q_{nm} - q_{mn}) = {}^1/_2 \int_{-1}^{+1} \{ \chi_n Q(\chi_m) - \chi_m Q(\chi_n) \}\, dy = {}^1/_2 \int_{-1}^{+1} U' (\chi_n \chi_m' - \chi_m \chi_n')\, dy \quad (32).$$

Für die Funktionen χ gilt nun die Zerlegung in langsamen und raschen Anteil;

$$\chi_n = \chi_{nl} + \chi_{nr}\,; \qquad \chi_m = \chi_{ml} + \chi_{mr}.$$

In dem Integral (32) kommen zunächst Produkte aus χ_{nl} und χ_{ml} vor, die höchstens von der Größenordnung $1/mn$ sind und im übrigen, da alle langsamen Funktionen der nämlichen, von n unabhängigen sich annähern, sich in (32) gegenseitig aufheben. Soweit ferner Produkte von χ_{nl} und χ_{mr} in Betracht kommen, ergeben sie nach der Integration Glieder der Größe $1/mn$ und $(m-n)/(m+n)\, mn$.

Endlich ist der Anteil in q_{mn} zu berechnen, der nur aus den χ_{nr} und χ_{mr} gebildet ist. Er ergibt asymptotisch ein Integral der Form:

$$\int U'' \left[\frac{1}{n} \sin \sqrt{|\lambda_n (U-c)|}\, y \cos \sqrt{|\lambda_m (U-c)|}\, y - \frac{1}{m} \sin \sqrt{|\lambda_m (U-c)|}\, y \cos \sqrt{|\lambda_n (U-c)|}\, y \right] dy$$

oder, nach Umordnung und Ausführung der Integration, Glieder der obigen Art und noch solche von der Ordnung: $(m+n)/(m-n)\,mn$. Die letzteren sind die im Ganzen am meisten ins Gewicht fallenden.

Bei den vorangehenden Abschätzungen war übrigens vorausgesetzt, daß λ_m und λ_n gleiches Vorzeichen, daher die Funktionen χ_m und χ_n gleiches Hauptgebiet haben. Haben dagegen λ_m und λ_n verschiedenes Vorzeichen, so ist jedes Gebiet nur für eine der beiden Funktionen Hauptgebiet, für die andere Nebengebiet, und eine der Funktionen χ_r geht daher dort exponentiell zu 0. Die Größen q_{mn} nehmen dann in stärkerem Maße ab, als die vorstehend berechneten Größenordnungen.

10. Die asymptotischen Wurzeln der Determinantengleichung $D = 0$. Die vorstehenden Abschätzungen geben die Grundlage für die Abschätung der Determinante D (27). Zu dem Zweck ist der Hadamardsche Determinatensatz heranzuziehen, der aussagt, daß der Betrag folgender Determinante:

$$\left| \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \ldots\ldots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots\ldots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \ldots\ldots & a_{kk} \end{array} \right| \leq \sqrt{s_1 \cdot s_2 \cdot s_3 \ldots\ldots s_k} \qquad s_i = a_{i1}^2 + a_{i2}^2 + \ldots\ldots a_{ik}^2 \quad \ldots \quad (33).$$

In der Determinante D folgt bei festem S wegen der asymptotischen Regeln für die λ_n und q_{mn} zunächst die Konvergenz der Summen s_n und ihr asymptotischer Wert in der Form $s_n = 1 + a/n^2$, wobei a eine mit wachsendem n endlich bleibende Konstante bedeutet. Daraus folgt bekanntlich die Konvergenz des unendlichen Produkts $s_1, s_2, s_3 \ldots$, somit nach (33) die von D.

Wir gehen ferner davon aus, daß die Determinante D entwickelt eine Reihe nach Potenzen von S darstellt: $a_0 + a_1 S + a_2 S^2 + \ldots\ldots$, deren Koeffizenten a_i sich alle aus Unterdeterminanten der Determinante

$$\Delta = \begin{array}{c|ccccc} 1/\lambda_1 & 1 & q_{1,-1} & q_{1,2} & q_{1,-2} & \ldots \\ 1/\lambda_{-1} & q_{-1,1} & -1 & q_{-1,1} & q_{-1,-2} & \ldots \\ 1/\lambda_2 & q_{2,1} & q_{2,-1} & 1 & q_{2,-2} & \ldots \\ 1/\lambda_{-2} & q_{-2,1} & q_{-2,-1} & q_{-2,2} & -1 & \ldots \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{array} \quad \ldots \quad (34)$$

zusammensetzen. (Die Faktoren $1/\lambda_i$ sind zu jeder Reihe multipliziert zu denken.). Bricht man die Determinante D, bzw. Δ beim Index $-k$ ab, so daß eine Teildeterminante D_k bzw. Δ_k entsteht, so bricht die Potenzreihe beim $2k$-ten Glied ab. Dessen Koeffizient ist die Determinante Δ_k selbst, der Koeffizient von S^{2k-1} ist die Summe der ersten Unterdeterminanten zu den Diagonalgliedern von Δ_k, wobei die zur r ten Reihe gehörige Unterdeterminante mit $\Delta_k^{(r)}$ bezeichnet sei; der Koeffizient von S^{2k-2} ist die Summe der zweiten Unterdeterminanten zu den Diagonalgliedern, $\Delta_k^{(r,s)}$ usw.

Für die Determinante Δ_k und ihre sämtlichen Unterdeterminanten zu den Diagonalgliedern ergibt dabei der Hadamardsche Satz sofort eine obere Grenze. Ferner ergibt er indirekt auch eine untere Grenze; denn wegen des asymptotischen Verhaltens der q_{mn} kann das Gleichungssystem:

$$y_m = x_m + q_{m1}\, x_1 + q_{m,-1}\, x_{-1} + q_{m2}\, x_2 + \ldots\ldots$$

schrittweise, ausgehend von der asymptotischen Näherung $x_m = y_m$, aufgelöst werden. Die Auflösung

$$x_m = y_m + Q_{m1}\, y_1 + Q_{m,-1}\, y_{-1} + Q_{m2}\, y_2 + \ldots\ldots$$

zeigt zugleich, daß die Q_{mn} das nämliche asymptotische Verhalten haben, wie die q_{mn}. Ihre Determinante $\bar{\Delta}$ ist der reziproke Wert der Determinante Δ; also ergibt der Hadamardsche Satz jetzt eine obere Grenze für $\bar{\Delta}_k$, somit eine untere Grenze für Δ_k. Das Gleiche gilt für jede der Unterdeterminanten.

Innerhalb dieser Grenzen nähern sich, mit wachsendem Index k, die Determinante Δ_k, und gleichzeitig die Unterdeterminanten, je einem bestimmten Wert. Und zwar ist dieser Grenzwert für alle der gleiche, K, wenn mit k auch zugleich die Zeiger r, s, usw. (die natürlich immer kleiner als $2k$ bleiben), unbegrenzt anwachsen, und ihre Anzahl, d. h. die Ordnung der Unterdeterminante, hinreichend klein ist neben k. Schreibt man also die aus D_k hervorgehende Potenzreihe in der Gestalt:

$$D = \frac{K}{\lambda_1 \lambda_{-1} \lambda_2 \lambda_{-2} \ldots \ldots \lambda_k \lambda_{-k}} (S^{2k} + A_{2k-1} S^{2k-1} + A_{2k-2} S^{2k-2} + \ldots) \quad (35),$$

so nähern sich die Koeffizienten A_i den Werten:

$$A_{2k-1} \simeq - \sum_1^k {}^r \lambda_{\pm r}; \qquad A_{2k-2} \simeq + \sum_1^k {}^{r,s} \lambda_{\pm r} \lambda_{\pm s} \text{ usw.} \quad \ldots \quad (36)$$

bis auf Beträge, die bei wachsendem Index klein daneben bleiben, während die λ_k selbst proportional mit k^2 groß werden.

Es folgt also im gleichen Sinn, daß sich für die $2k$ Wurzeln der Gleichung $D_k = 0$ die Summe der Wurzeln an $\Sigma \lambda_{\pm r}$, die Summe der Produkte zu zweien an $\Sigma \lambda_{\pm r} \lambda_{\pm s}$ annähert usw. Da das Entsprechende für die Determinante D_{k+1} gilt, so nähern sich die beim Uebergang von D_k zu D_{k+1} neu hinzukommenden Wurzeln gerade an $\lambda_{\pm(k+1)}$ an. Man schließt so fortfahrend auf die asymptotische Annäherung der Wurzeln S von $D = 0$ an die asymptotische Reihe der λ. Es ist damit nicht gesagt, daß die S wirklich reell sind, aber ihre Realteile müssen in der Nähe der reellen λ liegen, und die Imaginärteile müssen klein sein im Vergleich zu den Realteilen. Jedenfalls gibt es asymptotisch keine rein imaginären S, wie es die Lösung der physikalischen Aufgabe gefordert hätte.

11. Schlußfolgerung. Wenn ein gegebenes Profil $U(y)$, z. B. ein parabolisches vorliegt, so kann man meist die partikulären Integrale der Differentialgleichungen durch einfache Methoden, insbesondere Potenzentwicklungen nach der Größe S, aufstellen. Die Randbedingungen ergeben dann eine charakteristische Gleichung, die als eine Potenzreihe nach S erscheint, und deren Wurzeln man durch näherungsweise Auflösung, nach dem absoluten Betrag von S geordnet, erhält. Der im Vorangehenden bewiesene Satz sagt aus, daß höchstens die kleineren Wurzeln in dieser Reihe die für die Labilität des Profils erforderliche Eigenschaft haben können, rein imaginär zu sein, während sich mit wachsendem Absolutbetrag die Wurzeln immer großen Werten auf der reellen Achse annähern. Man hat daher, um Sicherheit über die Existenz oder Nichtexistenz rein imaginärer Wurzeln zu bekommen, nur soweit mit den Potenzreihen zu rechnen, bis die Annäherung an das asymptotische Verhalten erkenntlich wird, wogegen neue asymptotische Untersuchungen im einzelnen Fall nicht erforderlich sind. Darin liegt ein auf allgemeiner Grundlage beruhender Beweis z. B. für Ergebnisse von Hopf, v. Mises und Blumenthal, wenn man noch einfache Näherungsrechnungen mit den Potenzreihen für kleinere S hinzufügt. Es ist dabei keineswegs nötig, in diesen Potenzreihen R bis zu der durch die wirklichen Reynoldsschen kritischen Zahlen gegebenen Höhe anwachsen zu lassen, da die Realität der Eigenwerte S schon bei kleinerem Absolutbetrag erkenntlich wird.

Im Widerspruch dazu scheinen mir dagegen Ergebnisse zu stehen, die Herr W. Heisenberg[1]) veröffentlicht hat. Denn es wird dort auf rein asymptotischer Grundlage, die in der Entwicklung nicht weitergeht als unsere asymptotischen Näherungen, z. B. das Parabelprofil als »schwingungsfähig« hingestellt, d. h. rein imaginärer Wurzeln S fähig (l. c. S. 604). Ein solches Resultat kann nach unserem Satz auf dieser Grundlage nicht abgeleitet werden. Ohne auf die Einzelheiten der Heisenbergschen Ueberlegungen hier einzugehen, möchte ich nur erwähnen, daß er mit einer sehr bedenklichen Uebertragung der von Hopf im speziellen Fall aufgestellten »Uebergangssubstitutionen« arbeitet, und daß er gewisse Ansätze von den Rayleighschen reibungslosen Untersuchungen übernimmt, die schon bei Rayleigh nicht als erwiesen betrachtet werden können. Denn wie schon eingangs erwähnt, erfordert gerade die Frage der reibungslosen, schwingungsfähigen Profile in Wirklichkeit einen genauen Grenzübergang von dem Fall kleiner Reibung her, der bei Rayleigh durch Annahme einer willkürlichen Uebergangsgleichung ersetzt ist.

[1]) Annalen d. Physik. Bd. 74 (1924), S. 577ff.

Erwähnt sei noch, daß die von Blumenthal im speziellen Fall durchgeführten asymptotischen Näherungen weitergehen, indem sie strenge Fehlerabschätzungen hinzufügen, die es gestatten, diese Rechnungen auch auf kleinere Werte der Variabeln S auszudehnen.

Zusatz.

Für die Poisseuillesche Strömung mit Parabelprofil ergibt sich aus der Berechnung mit Potenzreihen, daß schon für kleine Absolutbeträge nur reelle Wurzeln S existieren und folglich nach unserem Ergebnis immer Stabilität herrscht. Ich habe die numerischen Rechnungen allerdings bisher nur unter Vernachlässigung der α^2 durchgeführt, wie dies auch in einer im Anschluß an L. Prandtl[1]) ausgeführten Untersuchung von O. Tietjens[2]) geschieht, nehme aber nicht an, daß die α^2-Glieder das numerische Resultat ändern können, da sie eher im entgegengesetzten Sinne wirken.

In der Zwischenzeit seit der Fertigstellung dieses Aufsatzes ist auch der Vortrag von v. Kármán[3]) im Druck erschienen, in dem ein erster Ansatz zur statistischen Berechnung der turbulenten Strömung durchgeführt wird. Und zwar wird hier eine Wirbelverteilung im Innern des Kanals auf statistischer Grundlage aufgestellt; um aber die Elemente, auf die sich die Statistik bezieht, näher festzulegen, muß natürlich auf die hydrodynamische Grundlage, also die Randwertaufgabe, zurückgegriffen werden. v. Kármán stützt sich in diesem Sinne auf die genannte Arbeit von Tietjens und gelangt damit, wenigstens der Größenrechnung nach, zu einer bemerkenswerten Uebereinstimmung hinsichtlich des Widerstandskoeffizienten mit den empirischen Werten. Um nun diese Untersuchungen gegenüber meiner obigen zu orientieren, ist hierzu folgendes zu bemerken: Prandtl und Tietjens gelangten auf Grund asymptotischer Berechnungen in der »Grenzschicht«, zu dem, dem meinigen scheinbar widersprechenden Ergebnis, daß unter Umständen für beliebig große, reelle R, d. h. rein imaginäre S, stationäre und auch zeitlich anwachsende Lösungen der Aufgabe existieren. Dieses Ergebnis ist aber, in unserer Ausdrucksweise, auf folgendem Wege abgeleitet: Es wird ausgegangen von den Fällen, in denen eine »langsame« Lösung sich, mit Rayleigh, so bestimmen läßt, daß an beiden Rändern $\varphi = 0$ wird, d. h. die normale Geschwindigkeitskomponente v verschwindet, während $d\varphi/dy$, d. h. die Gleitgeschwindigkeit u, dann nicht verschwinden kann. Durch Zusatz einer »raschen« Lösung von der asymptotischen Form $\frac{c_+}{\sqrt{S}} e^{+\sqrt{S(u-c)}(x-1)}$ an der Wand $x = +1$, (und einer entsprechenden $\frac{c_-}{\sqrt{S}} e^{-\sqrt{S(u-c)}(x+1)}$ an der Wand $x = -1$), die vom Rand nach dem Innern hin rasch abklingt, kann man erreichen, daß die Gleitgeschwindigkeit mit $d\varphi/dy$ verschwindet; es ist aber dann φ nicht mehr 0, sondern eine Größe von der Ordnung $1/\sqrt{S}$, und die verfügbaren Konstanten reichen nicht aus, um somit an beiden Wänden die Quergeschwindigkeit v exakt zum Verschwinden zu bringen. Da unter diesen Umständen Energie von der Wand an die Flüssigkeit übertragen wird, scheint mir die Tatsache, daß jetzt anwachsende Schwingungen existieren können, nicht verwunderlich. Das steht auch völlig mit meinem Resultat im Einklang, da eben, wenn v nicht exakt 0 ist, nicht mehr eine homogene, sondern eine inhomogene Aufgabe vorliegt, die gerade deshalb für große reelle R lösbar ist, weil die homogene Aufgabe hier keine Lösung besitzt.

Es handelt sich dann aber nicht mehr um die Strömung zwischen ideal glatten und starren Wänden, sondern nur zwischen praktisch glatten Wänden, die kleine Querbewegungen zulassen. Eine ähnliche Feststellung war auch früher schon von L. Hopf[4]) gemacht worden. Wenn ich alles dies zusammenfasse, glaube ich sagen zu können, daß im ideal glatten Rohr keine turbulente Strömung möglich ist, in dem Sinne, daß sich einer mittleren Parallelströmung kleine stationäre Schwingungen überlagern. Auch die statistischen Berechnungen, sofern sie sich auf die angeführten oder ähnliche Rechnungen stützen, beziehen sich nicht auf ideal glatte, sondern nur auf praktisch glatte Wände. 537

[1]) Bemerkungen über die Entstehung der Turbulenz, d. Ztschr. Bd. 1 (1925), S. 436.

[2]) Beiträge zur Entstehung der Turbulenz, d. Ztschr. Bd. 5 (1925), S. 200.

[3]) Ueber die Stabilität der Laminarströmung und die Theorie der Turbulenz: Berichte d. 1. internationalen Kongresses für angew. Mechanik, Delft 1924, S. 97.

[4]) Zur Theorie der Turbulenz; Ann. d. Physik, Bd. 56 (1919), S. 538.

Über die Bestimmung des Genauigkeitsmaßes im Gaußschen Fehlergesetz.

Von **WALTER FENDER** in Berlin.

Ist $\varphi(\varepsilon)$ das Gesetz, dem ein Fehler ε gehorcht, und $\psi(\varepsilon)$ eine Funktion, die eine Bewertung des Fehlers angibt, so versteht man unter dem auf ψ bezogenen »Fehlerrisiko« oder dem Erwartungswert von ψ den Ausdruck $R = \int \psi(\varepsilon)\,\varphi(\varepsilon)\,d\varepsilon$, die Integration über alle Werte von ε ausgedehnt. Bei Annahme des Gaußschen Gesetzes $\varphi(\varepsilon) = \frac{h}{\sqrt{\pi}}\,e^{-h^2\varepsilon^2}$ ergibt sich, wenn man $\psi(\varepsilon) = \varepsilon^2$ wählt, der Erwartungswert des Fehlerquadrates zu

$$R = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon^2\, e^{-h^2\varepsilon^2}\, d\varepsilon = \frac{1}{2\,h^2}.$$

Hat nun eine Beobachtungsreihe zu n Fehlern $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_n$ geführt, so pflegt man anzunehmen, daß ihr als Gaußsches Fehlergesetz jenes zugrunde liegt, für das der eben gefundene Ausdruck R mit $\frac{1}{n}(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \ldots \varepsilon_n^2)$ übereinstimmt. Das heißt, man berechnet h aus der Gleichung

$$\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}\varepsilon_\nu^2} = \frac{1}{\sqrt{2}\,h}\,(1+v) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

mit $v = 0$. Statt der Fehlerquadrate ε_ν^2 kann man aber etwa die Quadrate der Fehlerdifferenzen $(\varepsilon_\mu - \varepsilon_\nu)^2$, deren Anzahl $s = n\,(n = 1)/2$ ist, nehmen und unter Beachtung der Ergebnisse von Andrae[1]) und Helmert[2]) setzen:

$$\sqrt{\frac{1}{s}\sum_{\mu,\nu=1}^{n}(\varepsilon_\mu - \varepsilon_\nu)^2} = \frac{1}{h}\,(1+v), \qquad s = \frac{n\,(n-1)}{2} \quad \ldots\ldots \quad (2).$$

Jede der beiden Beziehungen (1) und (2) liefert mit $v = 0$ eine Bestimmung des Genauigkeitsmaßes h. Sieht man (1) bzw. (2) als Definition einer Größe v an, so kann man für diese aus der Annahme, daß die ε dem Gaußschen Gesetz genügen, ein Wahrscheinlichkeitsgesetz (Verteilungsgesetz) berechnen. Die Bestimmung von h aus (1) oder (2) mit $v = 0$ kann als um so sicherer angesehen werden, je enger die Grenzen sind, die für v bei gegebener Wahrscheinlichkeit bestehen. Es soll im folgenden untersucht werden, wie sich in diesem Sinne die Sicherheit in der Beurteilung der Genauigkeit ändert, wenn man anstelle der ersten Beziehung die zweite verwendet, d. h. anstelle des mittleren Fehlers die Fehlerdifferenzen zur Festlegung des Genauigkeitsmaßes h verwendet.

1. Bestimmung der Wahrscheinlichkeit von $E = \sum_{\nu=1}^{n}\varepsilon_\nu^2$.

Setzen wir $E = \sum_{\nu=1}^{n}\varepsilon_\nu^2$, so haben wir für die Wahrscheinlichkeit, daß E dem Intervall $(u, u + du)$ angehört, den Integralausdruck: $w(u)\,du = \left(\frac{h}{\sqrt{\pi}}\right)^n \int d\varepsilon_1 \int d\varepsilon_2 \ldots \int e^{-h^2(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \ldots + \varepsilon_n^2)}\,d\varepsilon_n$, ausgedehnt über die sämtlichen ε_ν, für welche die Beziehung $u \leqq E \leqq u + du$ besteht. Diese Grenzbestimmung läßt sich umgehen mit Hilfe der Methode des Diskontinuitätsfaktors. Wegen der Beziehungen

$$\frac{du}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{(E-u)\vartheta i}\,d\vartheta = 1 \text{ für } E = u$$
$$= 0 \text{ für } E \neq u$$

läßt sich der Ausdruck für $\mathfrak{W}\,E$ auch schreiben in der Form:

$$w(u)\,du = \frac{du}{2\pi}\left(\frac{h}{\sqrt{\pi}}\right)^n \int_{\vartheta=-\infty}^{+\infty} d\vartheta \int_{\varepsilon_1=-\infty}^{+\infty} d\varepsilon_1 \int_{\varepsilon_2=-\infty}^{+\infty} d\varepsilon_2 \ldots \int_{\varepsilon_n=-\infty}^{+\infty} e^{-h^2(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2+\ldots+\varepsilon_n^2)+(E-u)\vartheta i}\,d\varepsilon_n.$$

---

[1]) Astron. Nachr. LXXIV (1869).

[2]) Ibid LXXXVIII (1876).

Die Integration in Bezug auf ε_ν:

$J_\nu = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-(h^2 - \vartheta i)\varepsilon_\nu^2} d\varepsilon_\nu$ geht durch die Substitution $(h^2 - \vartheta i)\,\varepsilon_\nu^2 = z^2$ über in

$$J_\nu = \frac{1}{\sqrt{h^2 - \vartheta i}} \int e^{-z^2} dz.$$

Hierbei erstreckt sich die Integration über die geneigte Gerade der Abb. 1 in dem dort angegebenen Sinne. Nimmt man die Wurzel positiv, so liegt, da h^2 positiv ist und ϑ sowohl positiv wie negativ sein kann, das Winkelargument φ von z zwischen $-\frac{\pi}{4}$ und $+\frac{\pi}{4}$. Mithin verschwinden für $\lim r \to \infty$ die Integrale $\int e^{-z^2} dz$ über den beiden Kreisbögen, welche von der reellen Achse zu der Geraden unter dem Winkel φ führen.

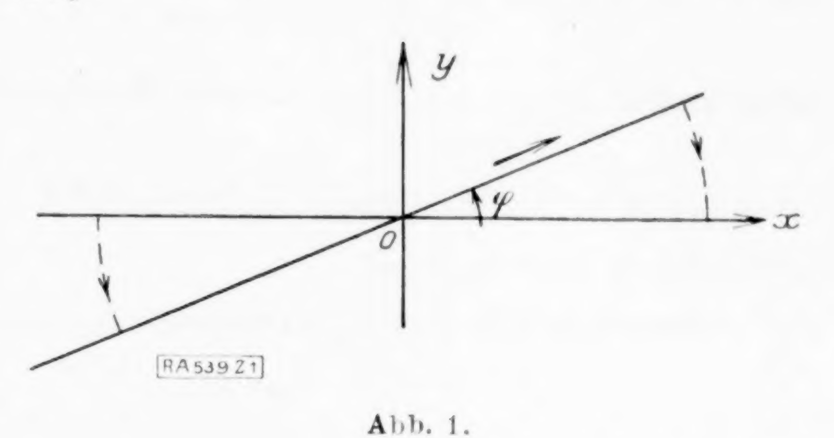


Abb. 1.

Der Cauchysche Integralsatz, angewendet auf den in Abb. 1 angedeuteten Bereich, liefert daher:

$$J_\nu = \frac{1}{\sqrt{h^2 - \vartheta i}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{h^2 - \vartheta i}} \sqrt{\pi}.$$

Wir bekommen somit weiter:

$$w(u)\,du = \frac{du}{2\pi} h^n \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-u\vartheta i}}{\sqrt{h^2 - \vartheta i}^{\,n}} d\vartheta.$$

Substituieren wir hier $\sqrt{h^2 - \vartheta i} = z = x + y i = r e^{i\varphi}$, so folgt

$$h^2 = x^2 - y^2 \quad \text{und} \quad \vartheta = -2xy \quad \text{sowie}$$

$$2\pi h^{-n} w(u) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-u\vartheta i}}{\sqrt{h^2 - \vartheta i}^{\,n}} d\vartheta = 2 i e^{-uh^2} \int \frac{e^{uz^2}}{z^{n-1}} dz.$$

Das letztere Integral ist im Sinne der Pfeilrichtung über den rechten Ast der Hyperbel (Abb. 2) $x^2 - y^2 = h^2$ zu nehmen. Wir müssen jetzt zwischen geradem und ungeradem n unterscheiden.

Im Falle $n = 2m + 2$ haben wir $J = \int \frac{e^{uz^2}}{z^{2m+1}} dz$. Bezeichnen wir dieses Integral mit J_r, wenn es über den rechten, und mit J_l, wenn es über den linken Hyperbelast erstreckt wird, so besteht unter Beachtung der Pfeilrichtungen die Relation $J_r = J_l$. Ferner verschwinden, da u positiv ist, für $\lim r \to \infty$ die Integrale J über den beiden Kreisbögen, welche von den Asymptoten der Hyperbel begrenzt sind und von der y-Achse geschnitten werden. Erstrecken wir daher das Integral J im positiven Sinne, also entgegen der Pfeilrichtung, über den geschlossenen Weg, welcher gegeben ist durch die beiden Hyperbel-

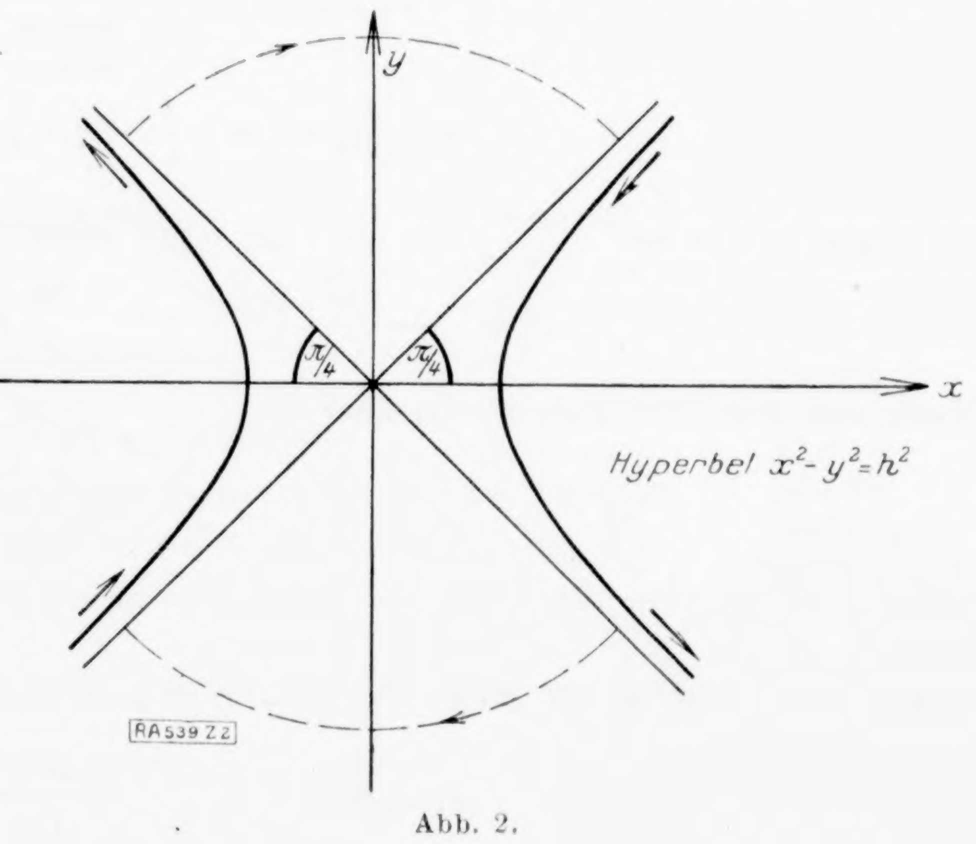


Abb. 2.

äste und die beiden genannten Kreisbögen, so ergibt sich, wenn wir diese Integration durch $\oint$ andeuten: $J_r = -\,{}^1/_2 \oint \frac{e^{u z^2}}{z^{2m+1}}\,d\,z$. Beachten wir die Cauchysche Integralformel für die n-te Ableitung $f^n(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\oint \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,d\,z$, so finden wir, da für $f(z) = e^{u z^2}$ die Relation $f^{(2m)}(0) = 2^m\,1\cdot 2\cdot 3\cdots(2m-1)\,u^m$ folgt:

$$\oint \frac{e^{u z^2}}{z^{2m+1}}\,d\,z = 2^m\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdots(2m-1)\,u^m\,\frac{2\pi i}{(2m)!}$$

oder wegen $2^m\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot(2m-1) = \frac{(2m)!}{m!}$:

$$\oint \frac{e^{u z^2}}{z^{2m+1}}\,d\,z = \frac{2\pi i}{m!}\,u^m$$

und folglich $J_r = -\frac{\pi i}{m!}\,u^m$.

Im Falle $n = 2m$ ergibt sich daher, indem wir m durch $m-1$ ersetzen:

$$w(u) = \frac{h^{2m}}{(m-1)!}\,u^{m-1}\,e^{-h^2 u} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

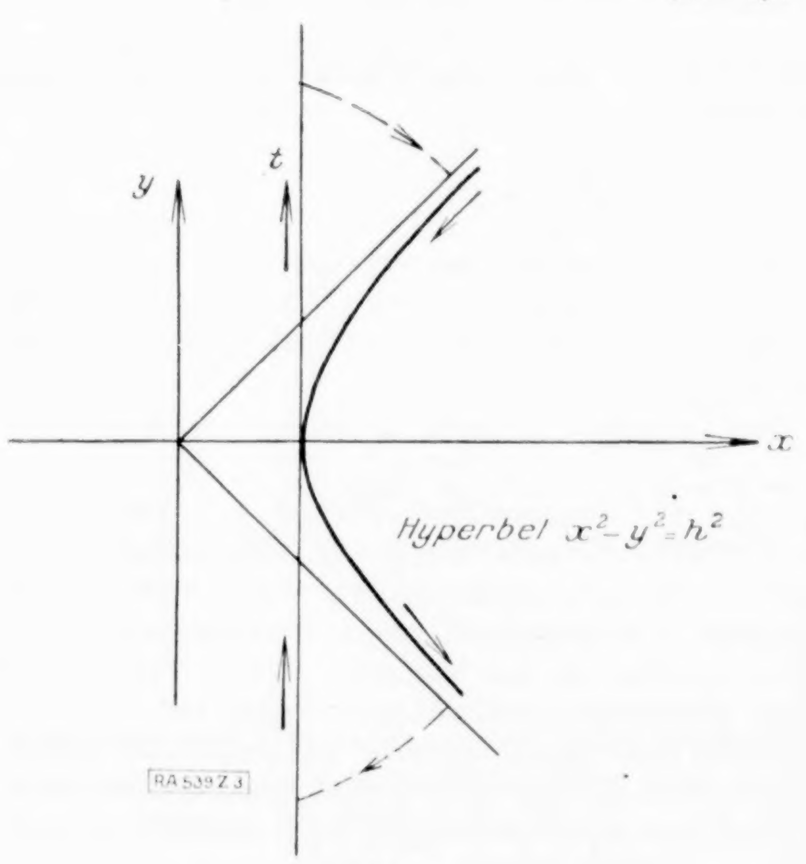


Abb. 3.

Setzen wir $n = 2m+1$, so ist $J = \int \frac{e^{u z^2}}{z^{2m}}\,d\,z$, wobei sich die Integration über den rechten Ast der Hyperbel $x^2 - y^2 = h^2$ im angegebenen Sinne (Abb. 3) erstrecken sollte. Dieses Integral heiße wieder J_r, während das über die Scheiteltangente t entgegen der Pfeilrichtung genommene mit J_t bezeichnet sei. Integrieren wir oberhalb der x Achse über den rechten Hyperbelast, über den Kreisbogen mit dem Radius $\lim r \to \infty$, welcher von dem rechten Hyperbelast und der Tangente t begrenzt ist, und über die Tangente t selber, so verschwindet das Integral J nach dem Integralsatz von Cauchy. Dasselbe gilt für den entsprechenden Weg unterhalb der x-Achse. Hieraus ergibt sich, wenn wir die Pfeilrichtung berücksichtigen, die Relation J_r und J_t. Durch partielle Integration erhält man für J_t die Rekursionsformel

$$J_t = \int_t \frac{e^{u z^2}}{z^{2m}}\,d\,z = \frac{2u}{2m-1}\int_t \frac{e^{u z^2}}{z^{2m-2}}\,d\,z\,,$$

da wegen $u > 0$ $\lim\limits_{y=\pm\infty} \frac{e^{u z^2}}{z^{2m-1}} = 0$ ist. Mit Hilfe dieser Formel ergibt sich

$$J_t = \frac{(2u)^m}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2m-3)(2m-1)}\int_t e^{u z^2}\,d\,z.$$

Nach dem Satz von Cauchy ist aber

$$\int_t e^{u z^2}\,d\,z = \int_y e^{u z^2}\,d\,z = i\int_{+\infty}^{-\infty} e^{-u y^2}\,d\,y = -\frac{i}{\sqrt{u}}\sqrt{\pi}$$

wenn $\int_y e^{u z^2}\,d\,z$ über die Achse des Imaginären in der negativen Richtung genommen wird.

Mithin haben wir, da $1\cdot 3\cdot 5\cdots(2m-3)(2m-1) = \frac{(2m)!}{2^m\,m!}$

$$J_t = J_r = -\frac{m!}{(2m)!}\cdot\frac{(4u)^m\sqrt{\pi}\,i}{\sqrt{u}}.$$

Für $n = 2m + 1$ erhalten wir daher den Ausdruck

$$w(u) = \frac{m!}{(2m)!} \cdot \frac{(2h)^{2m+1}}{2\sqrt{\pi}} \frac{u^m}{\sqrt{u}} e^{-h^2 u} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4).$$

Da E positiv, so muß E dem Intervalle 0 bis $+\infty$ mit der Wahrscheinlichkeit 1 angehören. Integriert man die Ausdrücke für $w(u)$, die sich für $n = 2m$ und $n = 2m + 1$ ergeben haben, in bezug auf u von 0 bis $+\infty$, so erhält man in der Tat in beiden Fällen den Wert 1.

2. Bestimmung der Wahrscheinlichkeit von $F = \sum_{\mu,\nu=1}^{n} (\varepsilon_\mu - \varepsilon_\nu)^2$. Verwendet man wieder den Diskontinuitätsfaktor $\frac{dz}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{(E-z)\vartheta i}\, d\vartheta$, so erhält man für die Wahrscheinlichkeit $w(u(du$, daß die Summe $\sum_{\mu,\nu=1}^{n} (\varepsilon_\mu - \varepsilon_\nu)^2$ dem Intervall $(u, u + du)$ angehört, den Ausdruck

$$w(u)\,du = \frac{du}{2\pi}\left(\frac{h}{\sqrt{\pi}}\right)^n \int_{\vartheta=-\infty}^{+\infty} d\vartheta \int_{\varepsilon_1=-\infty}^{+\infty} d\varepsilon_1 \int_{\varepsilon_2=-\infty}^{+\infty} d\varepsilon_2 \ldots \int_{\varepsilon_n=-\infty}^{+\infty} e^{-h^2(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2+\ldots+\varepsilon_n^2)+(E-u)\vartheta i}\, d\varepsilon_n.$$

Die Integrationen inbezug auf die ε_ν führen sämtlich auf Integrale von der Form

$$J_\nu = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a\varepsilon_\nu^2 - b\varepsilon_\nu + (c\varepsilon_\nu^2 + d\varepsilon_\nu)i}\, d\varepsilon_\nu$$

wo a positiv, b, c und d reell sind.

Wir führen in dieses Integral den Parameter y ein, indem wir setzen

$$f(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a\varepsilon_\nu^2 - b\varepsilon_\nu y + (c\varepsilon_\nu^2 + d\varepsilon_\nu y)i}\, d\varepsilon_\nu.$$

Wir dürfen unter dem Integral nach y differentiieren:

$$f'(y) = -(b - di)\int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon_\nu\, e^{-a\varepsilon_\nu^2 - b\varepsilon_\nu y + (c\varepsilon_\nu^2 + d\varepsilon_\nu y)i}\, d\varepsilon_\nu.$$

Andererseits liefert partielle Integration:

$$f(y) = -2\frac{a - ci}{(b - di)y}\int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon_\nu\, e^{-a\varepsilon_\nu^2 - b\varepsilon_\nu y + (c\varepsilon_\nu^2 + d\varepsilon_\nu y)i}\, d\varepsilon_\nu$$

da

$$\lim_{\varepsilon_\nu = \pm\infty} e^{-a\varepsilon_\nu^2 - b\varepsilon_\nu y + (c\varepsilon_\nu^2 + d\varepsilon_\nu y)i} = 0.$$

Es ergibt sich mithin die Differentialgleichung

$$f'(y) = \frac{(b - di)^2}{2(a - ci)}\, y\, f(y).$$

Hieraus folgt mit C als Integrationskonstante:

$$f(y) = C\, e^{\frac{(b - di)^2}{4(a - ci)} y^2}.$$

Für $y = 0$ erhält man nach Früherem (S. 246):

$$C = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(a - ci)\varepsilon_\nu^2}\, d\varepsilon_\nu = \frac{1}{\sqrt{a - ci}}\sqrt{\pi}.$$

Somit finden wir, wenn wir $y = 1$ setzen, für das vorgelegte Integral:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a\varepsilon_\nu^2 - b\varepsilon_\nu + (c\varepsilon_\nu^2 + d\varepsilon_\nu)i}\, d\varepsilon_\nu = \sqrt{\frac{\pi}{a - ci}}\, e^{\frac{(b - di)^2}{4(a - ci)}}.$$

Die Verhältnisse lassen sich übersichtlich gestalten, wenn man beachtet, daß für den Ausdruck $\varphi_\nu = h^2 - (n-\nu)\vartheta\, i$ die folgenden Relationen bestehen:

$$\varphi_\nu\, i + \nu\,\vartheta = \varphi_0\, i\,, \qquad \varphi_1\,\varphi_\nu + \nu\,\vartheta^2 = \varphi_0\,\varphi_{\nu+1}\,, \qquad \varphi_0 + \nu\,\varphi_{\nu+1} = (\nu+1)\,\varphi_\nu.$$

Ferner läßt sich die Summe $E = \sum_{\mu,\nu=1}^{n} (\varepsilon_\mu - \varepsilon_\nu)^2$ auf die Form bringen

$$E = (n-1)\,S_{1\,n} - 2\,\varepsilon_1\, s_{2\,n} - 2\,\varepsilon_2\, s_{3\,n} - \ldots - 2\,\varepsilon_{n-1}\, s_{n,n}$$

wenn man setzt:

$$S_{\mu\,n} = \varepsilon_\mu^{\,2} + \varepsilon^2_{\mu+1} + \ldots + \varepsilon_n^{\,2}\,, \qquad s_{\mu\,n} = \varepsilon_\mu + \varepsilon_{\mu+1} + \ldots + \varepsilon_n.$$

Die Integration in bezug auf ε_ν liefert daher, wenn wir noch die Bezeichnung $\Phi_\nu = h^4 + (n-\nu)^2\,\vartheta^2$ einführen, die Ausdrücke:

$$a = h^2 + (\nu-1)\,\frac{h^2\,\vartheta^2}{\Phi_{\nu-1}}\,, \qquad b = (\nu-1)\,\frac{2\,s_{\nu+1,n}\,h^2\,\vartheta^2}{\Phi_{\nu-1}}$$

$$c = (n-1)\,\vartheta - (\nu-1)\,\frac{[n-(\nu-1)]\,\vartheta^3}{\Phi_{\nu-1}}\,, \qquad d = -\,2\,s_{\nu+1,n}\,\vartheta - (\nu-1)\,\frac{2\,s_{\nu+1,n}\,[n-(\nu-1)]\,\vartheta^3}{\Phi_{\nu-1}}$$

und mithin wegen der für φ_ν geltenden Relationen:

$$a - c\,i = \frac{\varphi_0\,\varphi_\nu}{\varphi_{\nu-1}}\,, \qquad b - d\,i = 2\,s_{\nu-1,n}\,\vartheta\, i\,\frac{\varphi_0}{\varphi_{\nu-1}}.$$

Folglich erhält man endgültig:

$$J_\nu = \sqrt{\frac{\varphi_{\nu-1}}{\varphi_0\,\varphi_\nu}\,\pi}\cdot e^{-s^2_{\nu+1,n}\,\vartheta^2\,\frac{\varphi_0}{\varphi_{\nu-1}\,\varphi_\nu}}.$$

Die Integrationen in bezug auf ε_1. $\varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_\nu$ führen mithin durch Induktionsschluß zu dem Ausdruck:

$$w(u)\,d\,u = \frac{d\,u}{2\,\pi}\left(\frac{h}{\sqrt{\pi}}\right)^n (\sqrt{\pi})^\nu \int\limits_{\vartheta=-\infty}^{+\infty} d\,\vartheta \int\limits_{\varepsilon_{\nu+1}=-\infty}^{+\infty} d\,\varepsilon_{\nu+1}\ldots$$

$$\int\limits_{\varepsilon_n=-\infty}^{+\infty} e^{-\varphi_1 S_{\nu+1,n} - 2\varepsilon_{\nu+1} s_{\nu+2,n}\vartheta i + \alpha_{\nu+2,n} + \beta_{\nu+1,n} - u\vartheta i}\,\frac{d\,\vartheta}{\sqrt{\varphi_0^{\,\nu-1}\,\varphi_\nu}}$$

wo

$$\beta_{\nu+1,n} = -\,s^2_{\nu+1,n}\,\vartheta^2\,\frac{\varphi_0}{\varphi_{\nu-1}\,\varphi_\nu} - (\nu-1)\,s^2_{\nu+1,n}\,\vartheta^2\,\frac{1}{\varphi_{\nu-1}}$$

$$= -\,s^2_{\nu+1,n}\,\vartheta^2\,\frac{\varphi_0 + (\nu-1)\,\varphi_\nu}{\varphi_{\nu-1}\,\varphi_\nu} = -\,\nu\,\frac{s^2_{\nu+1,n}\,\vartheta^2}{\varphi_\nu}$$

da

$$\varphi_0 + (\nu-1)\,\varphi_\nu = \nu\,\varphi_{\nu-1}.$$

Führt man daher die Integrationen in bezug auf die sämtlichen ε_ν aus, so ergibt sich schließlich

$$w(u) = \frac{1}{2\,\pi}\left(\frac{h}{\sqrt{\pi}}\right)^n (\sqrt{\pi})^n \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-u\,\vartheta\, i}}{\sqrt{\varphi_0^{\,n-1}\,\varphi_n}}\,d\,\vartheta$$

oder da $\varphi_0 = h^2 - n\,\vartheta\, i\,,\ \varphi_n = h^2$,

$$w(u) = \frac{1}{2\,\pi}\,h^{n-1} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-u\,\vartheta\, i}}{(\sqrt{h^2 - n\,\vartheta\, i})^{n-1}}\,d\,\vartheta.$$

Mit Hilfe der Substitution $\sqrt{h^2 - n\,\vartheta\, i} = z = x + y\, i = r\,e^{i\varphi}$ erhalten wir

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-u\,\vartheta\, i}}{(\sqrt{h^2 - n\,\vartheta\, i})^{n-1}}\,d\,\vartheta = \frac{2\,i}{n}\,e^{-u/n\ h^2} \int \frac{e^{u/n\ z^2}}{z^{n-2}}\,d\,z$$

die Integration $J = \int \frac{e^{u/n\ z^2}}{z^{n-2}}\,d\,z$ erstreckt sich im Sinne der Pfeilrichtung (siehe Abb. 3) über den rechten Ast der Hyperbel $x^2 - y^2 = h^2$.

Nach Früherem (Seite 246 und 247) haben wir im Falle $n = 2m + 3$

$$J = \int \frac{e^{u/n\, z^2}}{z^{2m+1}}\, dz = -\frac{\pi i}{m!}\left(\frac{u}{n}\right)^m$$

und im Falle $n = 2m + 2$:

$$J = \int \frac{e^{u/n\, z}}{z^{2m}}\, dz = -\frac{m!}{(2m)!}\,\frac{(4\, u/n)^m \sqrt{\pi} \cdot i}{\sqrt{u/n}}$$

Folglich ergibt sich, wenn wir m durch $m - 1$ ersetzen, für die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Summe $E = \sum_{\mu,\nu=1}^{n} (\varepsilon_\mu - \varepsilon_\nu)^2$, wo die Indizes μ und ν die sämtlichen Kombinationen der Zahlen $1, 2, 3 \ldots n$ durchlaufen, dem Intervall $(\mu,\ u + du)$ angehört:

Im Falle $n = 2m + 1$:

$$w(u) = \frac{h^{2m}}{(m-1)!\, n^m}\, u^{m-1}\, e^{-h^2/n\, u} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5),$$

im Falle $n = 2m$:

$$w(u) = \frac{2^{m-2}}{m^m}\,\frac{(m-1)!}{[2(m-1)]!}\sqrt{\frac{2m}{\pi}}\,\frac{u^{m-1}}{\sqrt{u}}\, h^{2m-1}\, e^{-h^2/_n\, u} \quad \ldots\ldots \quad (6).$$

Macht man hier die Probe, indem man in bezug auf u von 0 bis $+\infty$ integriert, so erhält man tatsächlich in beiden Fällen den Wert 1.

3. Bestimmung des Genauigkeitsmaßes h mit Hilfe der Summen E bzw. F.

Von den in den Gl. (3) bis (6) gefundenen Wahrscheinlichkeitsdichten für die Werte von E bzw. F müssen wir jetzt übergehen zu den auf v bezogenen Wahrscheinlichkeitsdichten. Wir haben nach Gl. (1) mit $E = \sum_{\nu=1}^{n} \varepsilon_\nu^2 = u$

$$u = \frac{n}{2h^2}(1 + v)^2, \text{ also } du = \frac{n}{h^2}(1 + v)\, dv \quad \ldots\ldots \quad (7)$$

und nach Gl. (2) mit $F = \sum_{\mu,\nu=1}^{n} (\varepsilon_\mu - \varepsilon_\nu)^2 = u$

$$u = \frac{s}{h^2}(1 + v)^2, \text{ also } du = \frac{2s}{h^2}(1 + v)\, dv \quad \ldots\ldots \quad (8).$$

Führt man (7) in (3) und (4), dann (8) in (5) und (6) ein, so erhält man für die auf v bezogenen Wahrscheinlichkeitsdichten die folgenden Ausdrücke, in welchen h nicht mehr auftritt:

Im Fall des Ansatzes (1):

$$2\,\frac{m^m}{(m-1)!}(1 + v)^{2m-1}\, e^{-w(1+v)^2} \text{ bei } n = 2m \quad \ldots\ldots \quad (\mathrm{Ia}),$$

$$(2n)^m \sqrt{\frac{2n}{\pi}}\,\frac{m!}{(2m)!}(1 + v)^{2m}\, e^{-n/_2 (1+v)^2} \text{ bei } n = 2m + 1 \quad \ldots \quad (\mathrm{Ib}).$$

Im Falle des Ansatzes (2):

$$2^{m-1}(2m - 1)^{m-1}\sqrt{\frac{2(2m-1)}{\pi}}\,\frac{(m-1)!}{[2(m-1)]!}(1 + v)^{2(m-1)}\, e^{-\frac{2m-1}{2}(1+v)^2} \text{ bei } n = 2m \quad (\mathrm{IIa}),$$

$$2\,\frac{m^m}{(m-1)!}(1 + v)^{2m-1}\, e^{-m(1+v)^2} \text{ bei } n = 2m + 1 \quad \ldots\ldots \quad (\mathrm{IIb}).$$

Will man die Probe machen, so hat man zu beachten, daß für v das Intervall $(-1, +\infty)$ in Betracht kommt. Integriert man nach dv über dieses Gebiet, so ergibt sich tatsächlich in den sämtlichen 4 Fällen der Wert 1.

Entwickelt man

$$\left(\frac{2m+1}{2m}\right)^m = e^{m\, ln\left(1 + \frac{1}{2m}\right)} = e^{\frac{1}{2} - \frac{1}{2\; 2^2 m} + \frac{1}{3 \cdot 2^3 m^2} - + \cdots}$$

so daß also

$$\left(\frac{2m+1}{2m}\right)^m \sim e^{1/2}, \text{ ebenso } \left(\frac{2m-1}{2m-2}\right)^{m-1} \sim e^{1/2}$$

und beachtet die Stirlingsche Formel

$$n! = n^n\, e^{-n + \frac{D}{12n}} \sqrt{2\pi n} \sim n^n\, e^{-n} \sqrt{2\pi n}, \quad \text{wo } 0 \leq D \leq 1,$$

so erhält man schließlich die folgenden Näherungsgleichungen, die schon brauchbar sind für die Größenanordnung $m = 10$.

Für den Ansatz (1):

$$\sqrt{\frac{2m}{\pi}}\, e^{-v-\frac{4m-1}{2}v^2+\frac{2m-1}{3}v^3-\frac{2m-1}{4}v^4+\frac{2m-1}{5}v^5-+\cdots} \quad \text{bei } n = 2m \quad . \quad (1\text{a}),$$

$$\sqrt{\frac{2m+1}{\pi}}\, e^{-v-\frac{4m+1}{2}v^2+\frac{2m}{3}v^3-\frac{2m}{4}v^4+\frac{2m}{5}v^5-+\cdots} \quad \text{bei } n = 2m+1 \quad . \quad (1\text{b}).$$

Für den Ansatz (2):

$$\sqrt{\frac{2m-1}{\pi}}\, e^{-v-\frac{4m-3}{2}v^2+\frac{2m-2}{3}v^3-\frac{2m-2}{4}v^4+\frac{2m-2}{5}v^5-+\cdots} \quad \text{bei } n = 2m \quad . \quad (2\text{a}),$$

$$\sqrt{\frac{2m}{\pi}}\, e^{-v-\frac{4m-1}{2}v^2+\frac{2m-1}{3}v^3-\frac{2m-1}{4}v^4+\frac{2m-1}{5}v^5-+\cdots} \quad \text{bei } n = 2m+1 \quad (2\text{b}).$$

Damit sind wir zu Ausdrücken von leicht vergleichbarer Form gelangt. Setzt man in den Gleichungen (1a) und (1b) $m - 1/2$ anstelle von m, so gehen diese in die Gleichungen (2a) bzw. (2b) über. Man sieht also, **daß es schon für geringe Größenordnungen der Fehleranzahl n (etwa $n = 20$) keinen wesentlichen Unterschied bedeutet, ob man zur Bestimmung des Genauigkeitsmaßes h in dem Gaußschen Fehlergesetz in der herkömmlichen Weise die Quadratsumme der beobachteten Fehler nach (1) oder im Sinne des Ansatzes (2) die Quadratsumme der beobachteten Fehlerdifferenzen verwendet.** 539

KURZE AUSZÜGE

Baumechanik.

Die Knickfestigkeit des geraden Stabes, der in seiner Achsenrichtung gedrückt ist, wird von H. Zimmermann in zwei Aufsätzen behandelt (Der Begriff der Knickgrenze I und II. Berl. Berichte 1925, 374 bis 380, Nr. 18 und 493 bis 500, Nr. 26). Im großen ganzen ist hier das wiedergegeben, was sich im Lehrbuch von Grashof (Berlin 1878) und in ausführlicherer Darstellung in der bekannten Arbeit von A. Schneider (Z. Oesterr. Ing.- u. A.-Ver. 1901, S. 633) findet und dem Großteil der wissenschaftlich gebildeten Ingenieure längst geläufig ist. Besonderer Wert wird vom Verf. auf die Tatsache gelegt, daß das Knickproblem, das ein Stabilitätsproblem ist, nichts mit einer Spannungsaufgabe zu tun hat. Er meint, daß die neuerliche Erörterung des Fundamentalfalls der Knickung deshalb erforderlich sei, weil viele Schriftsteller seine früheren Abhandlungen über diesen Gegenstand nicht verstanden hätten. Da auf die Kritik des Referenten in dieser Zeitschrift (1925, S. 346) Bezug genommen ist, die die Zimmermannschen Arbeiten über den krummen Stab betreffen (Eine Erweiterung der Eulerschen Knicktheorie und Knickfestigkeit gekrümmter Stäbe mit elastischer Einspannung), sollen diese noch einmal kurz beleuchtet werden.

Bei dem von Haus aus gekrümmten Stab, sowie bei einer exzentrischen Kraftwirkung liegt stets ein Spannungsproblem vor, d. h. man hat zur gegebenen Last die auftretenden Spannungen und Deformationen zu bestimmen. Wird ein solcher Stab einer langsam wachsenden Drucklast S unterworfen, so tritt von $S = 0$ an eine Ausbiegung ein, die, wenn S sich dem Wert der Eulerlast K nähert, sehr stark wächst, so daß in der Regel die Elastizitätsgrenze überschritten sein wird, ehe S den Wert K erreicht hat. Die genaue Biegungstheorie liefert einen wohlbestimmten Wert der Ausbiegung und der Spannungen für jedes S unterhalb K, für $S = K$ und auch für solche S, die oberhalb K liegen. Dabei werden die Biegungspfeile für $S > K$ im allgemeinen wieder kleiner als für $S = K$. Die übliche angenäherte Biegungstheorie, die nur für kleine Ausbiegungen gilt, gibt natürlich die Verhältnisse in der Nähe von $S = K$ nicht richtig wieder. Sie läßt bei $S = K$ den Biegungspfeil entweder unendlich groß oder unbestimmt erscheinen. Diese Ergebnisse sind nur eine Folge der Vernachlässigung der höheren Potenzen der Ausbiegung, und namentlich dem Unbestimmtwerden kommt keine derartige Bedeutung zu, wie sie ihm von Zimmermann zugeschrieben wird. Jedenfalls liegt hier keinerlei Stabilitätsproblem vor. Ein solches entsteht ja beim geraden Stab nur dadurch, daß für diesen bei jedem S die biegungsfreie Deformation eine Gleichgewichtslage ist; diese biegungsfreie Form, zu der es ein Analogon beim krummen Stab überhaupt nicht gibt, wird bei $S = K$ instabil und zugleich wird von $S = K$ an eine Gleichgewichtsform mit Biegung möglich. — Demnach muß der Referent seine frühere Kritik der Zimmermannschen Arbeiten aufrecht erhalten. Die Selbstverständ-

lichkeiten, die Hr. Zimmermann über den geraden Stab ausführt, können seine Knicktheorie der krummen Stäbe, von der allein in meiner Kritik die Rede war, nicht stützen. Den Versuch, die Sachlage jetzt so darzustellen, als hätte ich die Meinung vertreten, daß »die Knickfestigkeit eines Stabes durch die Berechnung seiner Spannung zu bestimmen sei«, muß ich als völlig unbegründet zurückweisen.

Ueber **elastische Stabilität** und **moderne Konstruktionsmaterialien** berichtet R. de Fleury (La stabilité élastique et les matériaux modernes de construction. C. R. Paris 177. 392 bis 395, 1923, Nr. 6). Die Sicherheit eines belasteten Organs ist einerseits durch die Elastizitätsgrenze des Materials, andererseits durch die nur vom Elastizitätsmodul abhängige elastische Stabilität begrenzt. Die kritische Deformation (das Analogon zum Bruchgleichgewicht zwischen Anstrengung und elastischer Formänderung) besteht, im Sinne der üblichen Theorie zur Bestimmung der Knicklast, aus einer Reihe von Deformationselementen, deren Summe unbestimmt wird. Eine Konzidenz zwischen der Ebene der widerstehenden und biegenden Kräfte gibt z. B. zu einem sekundären Kräftepaar Veranlassung; dieses ruft ein Anwachsen der Exzentrizität, d. h. das zweite Glied der Reihe hervor. Die Vergrößerung der Exzentrizität veranlaßt ein neues Kräftepaar und dadurch eine dritte Serie usf. Die Stabilitätsbedingung wird dadurch definiert, daß ein Ausdruck der Serie (n) gleich ist dem Ausdruck der Serie ($n-1$). Stabilitätsuntersuchungen werden um so notwendiger, je ökonomischer Konstruktionen ausgeführt werden. Wird durch einen Fortschritt der modernen Metallurgie eine Erhöhung der Widerstandsfähigkeit des Materials erzielt, so wird die Sicherheit nur bezüglich der Festigkeit vergrößert, wenn der Modul unverändert bleibt. Die Dimensionierung von Stahlbauten und die von Konstruktionen aus Leichtmetallen ist auch bei sehr naheliegenden Elastizitätsgrenzen verschieden da große Unterschiede der Elastizitätsziffern bestehen. R. de Fleury spricht Flugzeugbauten aus Leichtmetallen infolge des kleinen spezifischen Gewichts einen Vorteil gegenüber Stahlkonstruktionen zu.

Einen experimentellen Nachweis für das **Prinzip der kleinsten Arbeit** erbringen A. J. Sutton Pippard und I. F. Baker (On an Experimental Verification of Castigliano's Principle of Least Work and of a Theorem relating to the Torsion of a Tubular Framework. Phil. Mag. (6), 50, 97 bis 112, 1925, Nr. 295). Die Wichtigkeit des Castiglianoschen Prinzips der kleinsten Arbeit und seine große Bedeutung für die Baupraxis veranlaßte die beiden Verfasser, eine experimentelle Ueberprüfung vorzunehmen. Die Versuche wurden mit einem räumlichen Tragwerk durchgeführt, das den äußeren Umriß eines sechseckigen Prismas mit einer einseitig aufgesetzten sechsseitigen Pyramide besitzt. Es besteht aus sechs Längsgliedern, die durch Querspanten in gleiche Abschnitte geteilt sind und ist in sechs Punkten der Grundfläche gelenkig gelagert. Zwischen den Längs- und Quergliedern sind in jeder Fläche zwei gekreuzte Diagonalen vorhanden, die Querspanten selbst sind unversteift. Die Stabanschlüsse sind als Gelenke nach einem Vorschlag von R. V. Southwell als kurze Bolzen ausgebildet, die wohl Druck übernehmen, sich jedoch nicht verbiegen. Die Längs- und Querglieder sind Stahlrohre, die gekreuzte Ausfachung besteht aus schlaffen Stäben, die eine solche Vorspannung erhalten, daß sie unter der maximalen Last noch wirksam bleiben. Man verwendete durchweg Luftfahrzeugmaterial mit großer Gleichmäßigkeit in Qualität und Form. Dieses Tragwerk wurde durch ein in der Pyramidenspitze angebrachtes Gewicht belastet bzw. bei einer zweiten Versuchsserie einem Drehmoment unterworfen. Die auftretenden Spannungen wurden mit einem Spezialinstrument gemessen, das in Verbindung mit der »Cambridge Instrument Company Limited« hergestellt war. Die Längenänderung jedes Konstruktionsorgans wurde mit einem Mikrometermikroskop bestimmt, wobei einer vollen Umdrehung des Kopfes eine Längenänderung von $^1/_{7000}$ cm entsprach. Es war dies einer Kraftwirkung von rd. 3,5 kg bei den Rohren und von rd. 0,5 kg bei den Drähten gleichwertig. Die Unterteilung ist nicht genau beschrieben, auch findet sich keine genaue Angabe über den größten möglichen Messungsfehler. — Die Uebereinstimmung zwischen den gemessenen und den nach der Theorie berechneten Stabkraftwerten war günstig; Differenzen bei den einzelnen Versuchen bewegten sich zwischen 0,5 und 3,5 vH.

Ebene **statisch unbestimmte Rahmentragwerke** berechnet H. Steuding nach der sog. »Gelenkmethode« (Zur Praxis der Statik im Eisenbetonbau. Der Bauingenieur 1926, S. 102 bis 107). In jeder Ecke des Rahmentragwerks wird ein Gelenk angebracht und dadurch das System in eine kinematische Kette verwandelt. Als Unbekannte werden eingeführt die Biegungsmomente an den gedachten Gelenkstellen und die Stab(sehnen)drehwinkel, die der Zahl der Freiheitsgrade der Kette entsprechen. An Gleichungen stehen zur Verfügung: Stetigkeitsbedingungen in der Anzahl der unbekannten Momente, d. h. Beziehungen, die ausdrücken, daß jeder Winkel beim Zusammenschluß von Stäben bei einer Formänderung erhalten bleibt und Gleichgewichtsbedingungen für einzelne Stäbe in der Anzahl der unbekannten Stabdrehwinkel (einer Anzahl, die gleich ist der Differenz aus den unbekannten Momenten und den Ueberzähligen des Systems). In dieser Weise untersucht H. Spiller einen Vierendeelträger mit parallelen Gurtungen (Rahmen-Träger. Der städtische Tiefbau, 1926, S. 13 bis 17). Grundsätzlich ist diese Methode aber nichts anderes als das Verfahren von F. Bleich (Die Berechnung statisch unbestimmter Tragwerke nach der

Methode des Viermomentensatzes, 2. Aufl., Berlin 1925). Der Zusammenhang soll z. B. an einem Vierendeelträger mit n Feldern ($3n + 1$ Stäben) gezeigt werden. Bei Bleich sind zufolge der $3n$ Ueberzähligen und $3n$ unbekannten Stabdrehwinkel $6n$ Unbekannte vorhanden. Dem stehen $6n$ Gleichungen gegenüber, nämlich $4n$ Stetigkeitsbedingungen und $2n$ Winkelgleichungen (die aussagen, daß die Vektorsumme der Relativverschiebungen jedes geschlossenen Rahmens gleich null ist). Nach dem vorliegenden Verfahren sind $4n$ Momente und n Stabdrehwinkel unbekannt, denen mit $4n$ Stetigkeitsbedingungen und n Gleichgewichtsbedingungen Bilanz gewahrt ist. Die Stetigkeitsbedingungen sind beide Male in der gleichen Form aufgestellt. Bei Bleich kann man nun aus den $2n$ Winkelgleichungen, die nur die $3n$ Stabdrehwinkel enthalten, n Gleichungen mit $2n$ unbekannten Stabdrehwinkeln gewinnen, hat also für $5n$ Unbekannte dann $4n$ Stetigkeitsbedingungen und n »reduzierte« Winkelgleichungen, in die man jetzt mit Gleichgewichtsbedingungen eingeht. Ein formaler Unterschied besteht darin, daß Bleich nicht wie hier die Eckmomente von vornherein als Unbekannte festlegt, sondern die Variabeln noch wählbar läßt.

Den **Balken auf elastischer Unterlage** berechnen K. v. Sanden und F. Schleicher (Beton und Eisen 1926, 83 bis 89). Die Theorie des Trägers auf elastischer Unterlage wurde von K. Hayashi in seinem Lehrbuch (Berlin 1921) ausführlich untersucht. Gegenüber Hayashi wird hier für den Fall des Balkens mit konstantem Querschnitt bei Beanspruchung durch eine Einzellast eine der Zahlenrechnung besser zugängliche Form mitgeteilt. Mit Hilfe von Einflußlinien kann auch ein beliebiger Lastangriff verhältnismäßig einfach erledigt werden. Alle diese Berechnungen sind aber in praxi mit Reserve aufzunehmen, da die vorausgesetzte — vom Eisenbahnoberbau übernommene — Beziehung der Proportionalität zwischen Bodendruck und Einsenkung doch einigermaßen willkürlich ist (vgl. a. die Arbeit von W. Wieghardt, diese Zeitschr. 2, 1922, S. 165 bis 184).

Versuche zur Ermittlung der in Keilverbindungen wirkenden Kräfte wurden von R. Baumann ausgeführt (Mitteilung aus der Materialprüfungsanstalt an der Technischen Hochschule Stuttgart. Maschinenbau 4, 663 bis 666, 1925, Nr. 14). Die Versuche haben den Zweck, der Praxis brauchbare Rechnungsunterlagen zu liefern. Gesucht ist die Größe der Stangenkraft S, die beim Eintreiben eines Keiles mit der Kraft P in der Stange entsteht. Es wird die einfache Beziehung $P = 2S\,\mathrm{tg}\,(\alpha + \rho)$ angesetzt, α ist der Keilwinkel, ρ der Reibungswinkel für die Bewegung des Keils an seinen Auflagerflächen. Durch den Versuch werden nun die Werte ρ dieser Gleichung experimentell bestimmt. Die Belastung P ist bekannt, S wird aus der Längenänderung der Stange mit einem Zeißschen Scherenmikroskop gemessen. Der Einfluß der Belastungsgeschwindigkeit wurde durch entsprechende Intervalle in der Lastaufbringung ausgeschaltet. Bei ruhender Last ergeben sich folgende Resultate: Ein Einfluß des Stangenmaterials ist nicht zu beobachten. Die Reibungszahlen $\mathrm{tg}\,\rho$ sind 0,04 bei Talgschmierung mit sorgfältiger Keilflächenbearbeitung, 0,07 bei Talgschmierung mit durchschnittlicher Keilflächenbearbeitung, 0,15 bei Oelschmierung und 0,22 bei entfetteten Gleitbahnen. Die Talgschmierung besitzt den Vorteil, daß ein Anfressen des Keils auch bei höheren Belastungen nicht eintritt, während bei Oelschmierung schon bei verhältnismäßig kleinen Lasten ein Anfressen stattfindet. Bei den untersuchten Keilverbindungen ($\alpha = 1^0\,10'$ und $\alpha = 17'\,18''$) konnte der Wert α gegenüber ρ (rd. $8^1/_2{}^0$) vernachlässigt werden. Versuche für Reibungszahlen bei dynamischem Eintreiben der Keile sind noch zu keinem endgültigen Abschluß gelangt.

Ratzersdorfer. 672

KLEINE MITTEILUNGEN

Ein einfaches Hilfsmittel graphischer Integration. Wenn zu einer mit der Längeneinheit e gezeichneten Kurve $y = f(x)$ die Integralkurve $Y = \int f(x)\,dx$ gesucht wird, so pflegt man nach dem bekannten Verfahren der graphischen Statik zunächst eine hinreichende Anzahl von Vertikalen, die zu den Abszissen x_i ($i = 1, 2, \ldots$) gehören mögen, durchzuziehen, dann in einer Nebenfigur, dem Kräfteplan, e horizontal von A bis B hinzulegen und von B aus auf der Vertikalen die Ordinaten y der auf der gegebenen Kurve liegenden Punkte P_i bis Q_i abzutragen. Dann ist tang BAQ_i numerisch gleich y_i, die Tangente im Punkte R_i der Integralkurve muß AQ_i parallel verlaufen. Vom gegebenen Ausgangspunkt R_1 der Integralkurve zieht man also $\| AQ_1$ die Tangente t_1 bis zur mittleren Abszisse, roh bis zur Mitte zwischen den zu x_1 und x_2 gehörigen Vertikalen, durch den Endpunkt dann $t_2 \| AQ_2$, und erhält so schrittweise einen Streckenzug, der die freihändig einzuzeichnende Integralkurve stützt.

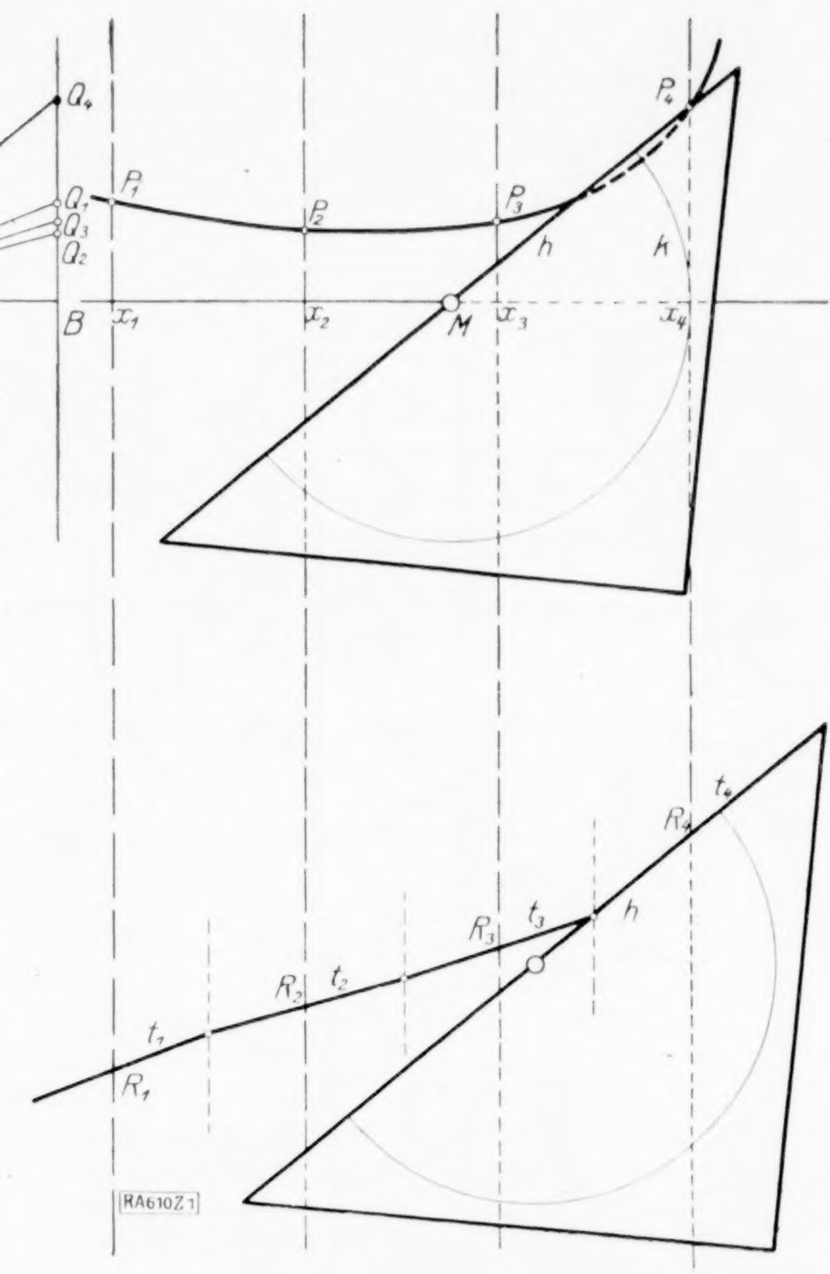
Die Herauszeichnung des Kräfteplans läßt sich nun ersparen, wenn man ein durchsichtiges Zeichendreieck benutzt, auf dem um einen Punkt M der Hypotenuse h ein Halbkreis k mit dem Radius e gezeichnet vorliegt. Man lege das »Integrationsdreieck« so, daß M auf die Abszissenachse fällt, k die Vertikale durch P_i berührt und h durch P_i geht. Das so zwischen Abszissenachse, Vertikale und Ziehkante h festgelegte, aber nicht gezeichnete Dreieck ist dem Kraftdreieck ABQ_i, das dadurch überflüssig wird, kongruent. Parallelverschiebung von h liefert t_i.

Das Instrument hat den gleichen Verwendungsbereich wie die Seileckskonstruktion, läßt sich z. B., wenn auch mit geringerer Genauig-

keit und Bequemlichkeit, nach umgekehrtem Verfahren zur Differentiation benutzen. Auch zur Integration mancher Differentialgleichungen ist es verwendbar; dabei ist von Vorteil, daß der die Steigung von h bestimmende Punkt nicht auf der von k berührten Vertikalen zu liegen braucht. (Siehe die nebenstehende Abbildung.)

Da mir nicht bekannt ist, daß das Instrument schon von anderer Seite angegeben wäre, habe ich seine Herstellung zunächst in kleinem Format ($h = 15$ cm, $e = 1/2, 1, \ldots 5$ cm) veranlaßt. Es ist zum Preise von 1 M durch Gebr. Wichmann in Berlin zu beziehen.

Greifswald. C. Thaer. 610



Ueber ein neues Verfahren zur harmonischen Analyse und Synthese. A. Analyse. Wird eine empirisch gegebene Funktion $y = f(x)$ in dem Intervall 0 bis 2π als periodisch betrachtet, so ist es unter sehr allgemeinen Voraussetzungen möglich, sie in eine Fourier-Reihe zu entwickeln.

Wir schreiben die Entwicklung in der Form:

$$\begin{aligned}\varphi(x) = a_0 &+ a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + a_3 \cos 3x \\ &+ \ldots + a_{n-1} \cos(n-1)x + a_n \cos nx \\ &+ b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + b_3 \sin 3x \\ &+ \ldots + b_{n-1} \sin(n-1)x.\end{aligned}$$

Hier bedeutet $2n - 1$ die Zahl der gegebenen Ordinaten und $\frac{\pi}{n}$ die Intervallbreite. Wir setzen voraus, daß die Anfangsordinate y_0 gleich der Endordinate y_{2n} ist.

Verlangen wir, daß $\varphi(x)$ an den vorgegebenen Stellen $x_\nu = \frac{\pi}{n}\nu$ ($\nu = 1$ bis $2n$) die Werte $f\left(\frac{\pi}{n}\nu\right)$ annimmt, so ergeben sich die Koeffizienten[1]):

$$\left.\begin{aligned} a_\alpha &= \frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{2n} f\left(\frac{\pi}{n}\nu\right)\cos\alpha\frac{\pi}{n}\nu \\ b_\alpha &= \frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{2n} f\left(\frac{\pi}{n}\nu\right)\sin\alpha\frac{\pi}{n}\nu \end{aligned}\right\} \alpha = 1 \text{ bis } n-1$$

$$a_0 = \frac{1}{2n}\sum_{\nu=1}^{2n} f\left(\frac{\pi}{n}\nu\right)$$

$$a_n = \frac{1}{2n}\sum_{\nu=1}^{2n} (-1)^\nu f\left(\frac{\pi}{n}\nu\right).$$

Die Bestimmung von a_0 und a_n ist eine gewöhnliche Addition. Zur Berechnung von a_α und b_α für $\alpha = 1$ bis $n - 1$ bilden wir unter Beachtung, daß $e^{\alpha\frac{\pi}{n}\nu i} = (-1)^\alpha \cdot e^{\alpha\left(\frac{\pi}{n}\nu + \pi\right)i}$ ist:

$$a_\alpha + b_\alpha i = \frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{2n} f\left(\frac{\pi}{n}\nu\right) e^{\alpha\frac{\pi}{n}\nu i}$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}\left\{f\left(\frac{\pi}{n}\nu\right) + (-1)^\alpha f\left(\frac{\pi}{n}\nu + \pi\right)\right\} e^{\alpha\frac{\pi}{n}\nu i}.$$

[1]) Siehe z. B. Runge-König, Vorlesungen über numerisches Rechnen. Berlin 1924, Verlag Springer.

Zur Abkürzung wollen wir $f\left(\frac{\pi}{n}\nu\right) = y_\nu$ setzen ($\nu = 1$ bis $2n$) und $y_\nu - y_{\nu+n} = d_\nu$ und $y_\nu + y_{\nu+n} = s_\nu$ ($\nu = 1$ bis n), dann ist:

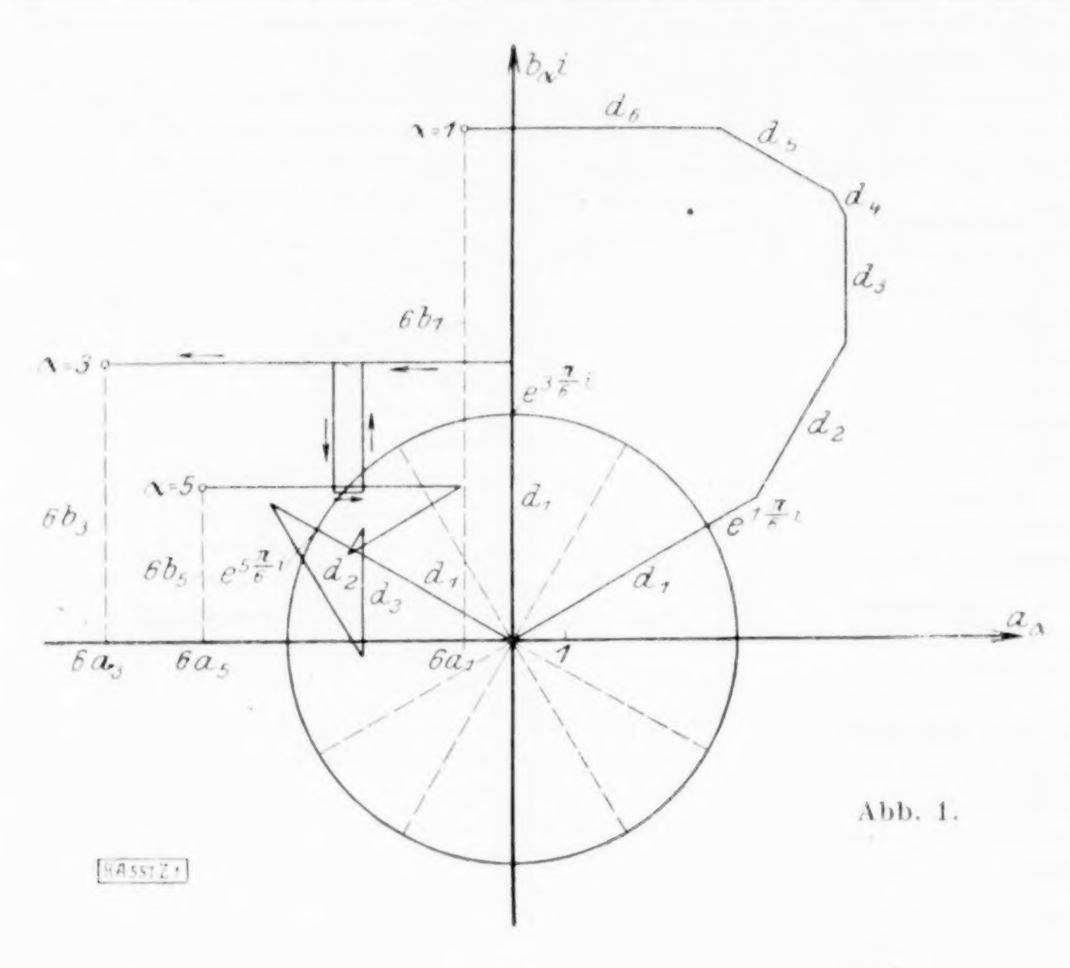
$$a_\alpha + b_\alpha i = \frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} d_\nu \cdot e^{\alpha\frac{\pi}{n}\nu i} \text{ für ungerade } \alpha,$$

$$a_\alpha + b_\alpha i = \frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} s_\nu \cdot e^{\alpha\frac{\pi}{n}\nu i} \text{ für gerade } \alpha.$$

Zur Bildung von d_ν und s_ν schreiben wir die gegebenen Funktionswerte folgendermaßen untereinander:

$$\begin{array}{ccccc} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & \ldots\ldots y_n \\ y_{n+1} & y_{n+2} & y_{n+3} & y_{n+4} & \ldots\ldots y_{2n} \\ \hline d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & \ldots\ldots d_n \\ s_1 & s_2 & s_3 & s_4 & \ldots\ldots s_n \end{array}$$

$a_\alpha + b_\alpha i$ **ist eine Summe komplexer Zahlen.** Jede Summierung bei konstantem α liefert zwei Koeffizienten, die man als Koordinaten des Endpunktes des Additionsstreckenzuges ablesen kann. Wenn man auf dem Einheitskreis um den Nullpunkt eines rechtwinkligen Koordinatensystems die komplexen Zahlen $e^{\frac{\pi}{n}\nu i}$ für $\nu = 1, 2$ bis $2n$ markiert, dann hat man alle vorkommenden Richtungen. Jedem α-Werte ($\alpha = 1$ bis $n - 1$) entspricht ein Additionsstreckenzug.

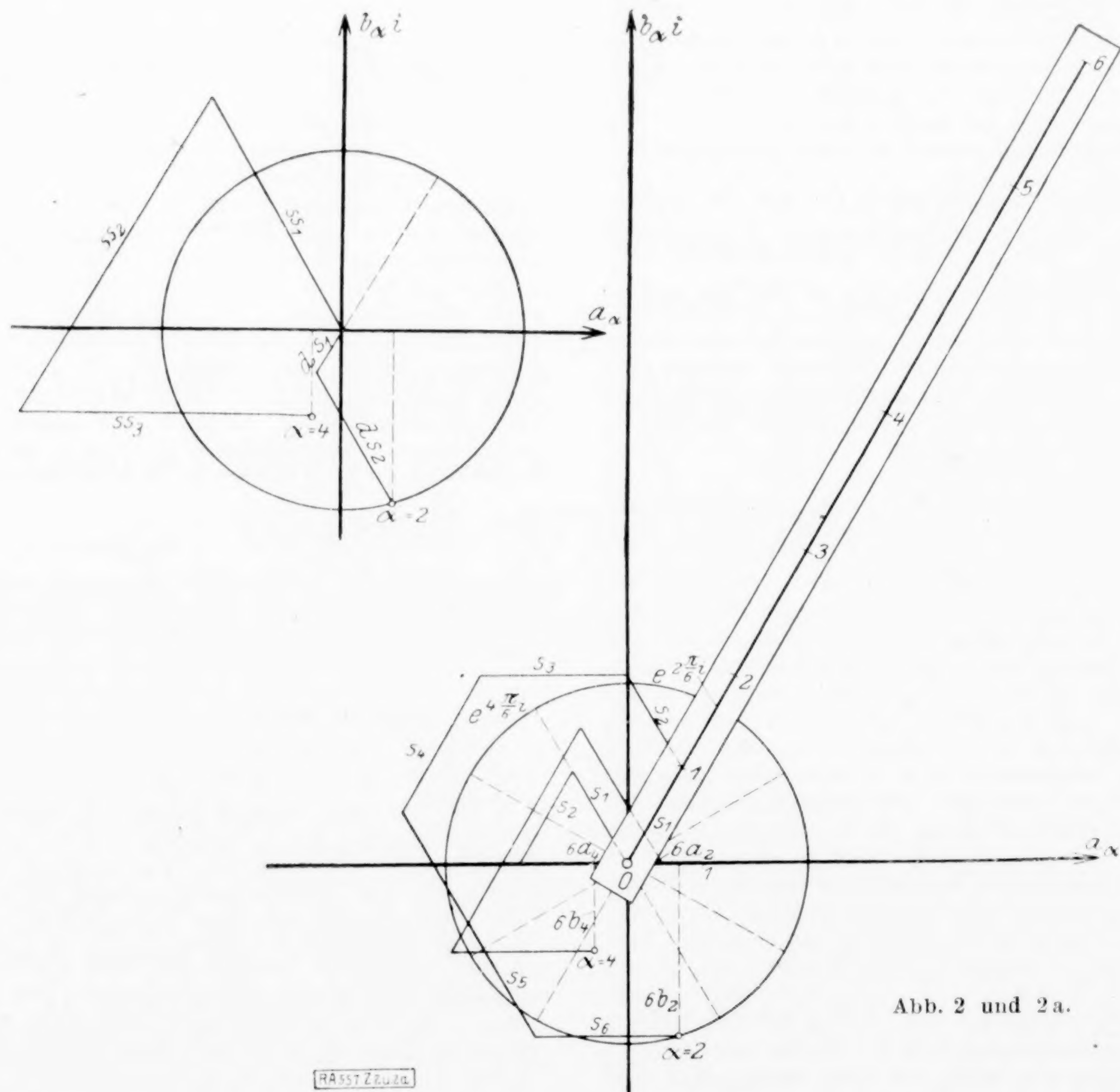

Abb. 1.

Die Addition läßt sich außerordentlich rasch ausführen, wenn man zweierlei beachtet:

1. Alle Streckenzüge, die zu ungeraden α-Werten gehören, haben die gleiche Länge, und wenn wir uns vorstellen, daß in den Ecken Gelenke sind, können sie alle miteinander zur Deckung gebracht werden, so daß die Eckpunkte aufeinanderfallen. Dasselbe gilt für die Streckenzüge, die zu geraden α-Werten gehören (Abb. 1).

2. Bei dem αten Streckenzug ist jede Teilstrecke gegen die vorhergehende um $\alpha \cdot \frac{\pi}{n}$ im positiven Sinne geschwenkt.

Die Durchführung ist so: Auf einem dünnen Papierstreifen ziehen wir eine Gerade, die Mittellinie, und tra-


Abb. 2 und 2a.

gen, von einem Punkte 0 aus anfangend, der Reihe nach die Differenzen d_ν (bzw. die Summen s_ν auf einem anderen Lineal) in der Einheit l hintereinander ab. Die Endpunkte mögen mit $\nu = 1, 2, \ldots . n$ bezeichnet werden (Abb. 2 mit $n = 6$). Wir legen nun unser Lineal mit 0 auf den Koordinatenanfangspunkt eines rechtwinkligen Koordinatensystems und geben der Mittellinie die Richtung $e^{\alpha \frac{\pi}{n} i}$, wenn es sich um die Bestimmung von a_α und b_α handelt. (Es ist zu beachten, daß zu ungeraden α-Werten ein anderes Lineal gehört als zu geraden α-Werten.) Im Punkte 1 stecken wir eine Nadel ein und schwenken das Lineal um $\alpha \frac{\pi}{n}$ im positiven Sinne. Dann stecken wir eine Nadel in den Punkt 2 und schwenken wieder um $\alpha \frac{\pi}{n}$ im positiven Sinne usw. Bei der letzten Schwenkung um $\nu = n - 1$ liefert die Lage des Punktes $\nu = n$ die Koeffizienten $n \cdot a_\alpha$ und $n \cdot b_\alpha$ als Koordinaten in unserem rechtwinkligen System.

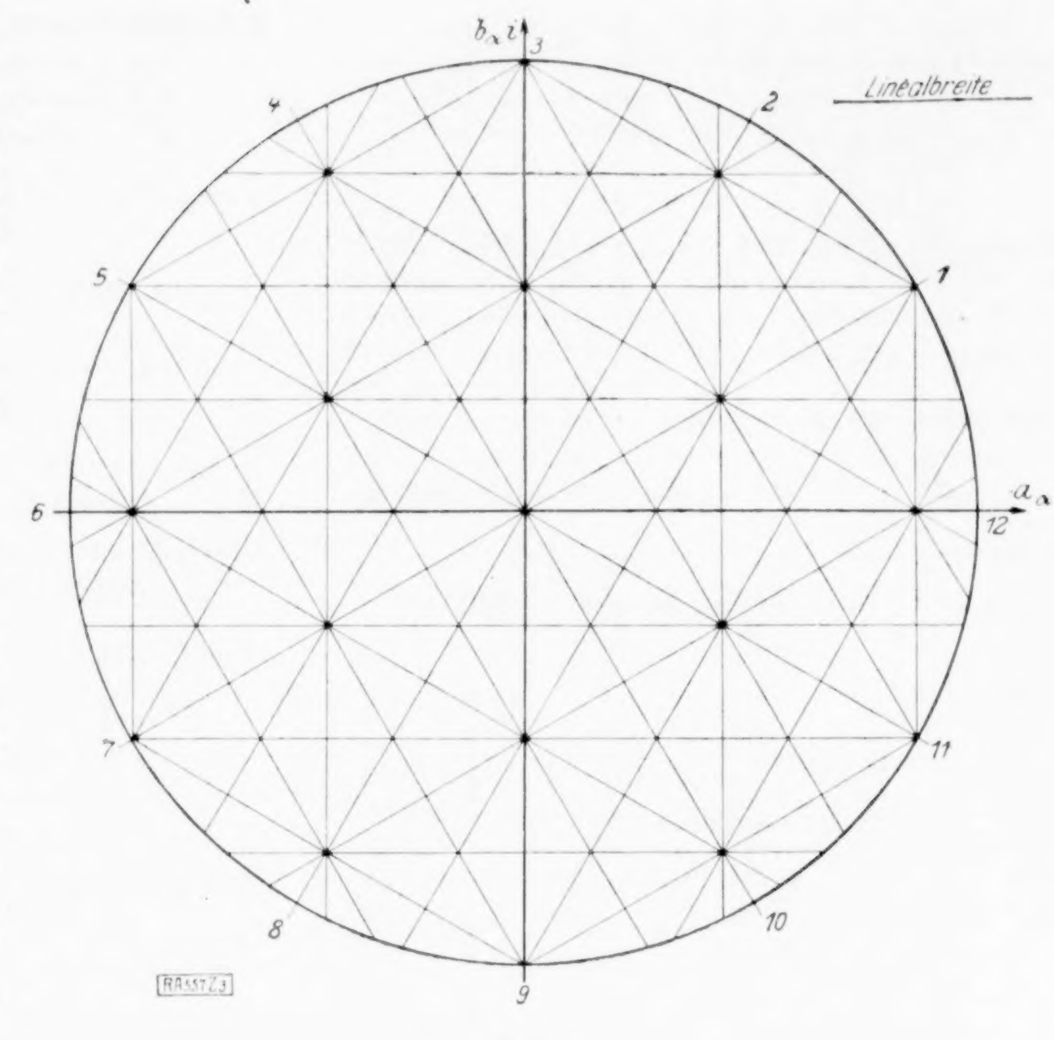


Abb. 3.

Die Schwenkungen um $\alpha \cdot \frac{\pi}{n}$ werden sehr einfach mit einem besonders konstruierten Papier durchgeführt. Das Papier ist bedeckt mit n Parallelscharen (Abb. 3 mit $n = 6$).

Die zweite Parallelschar bildet mit der ersten Winkel, die gleich $\frac{\pi}{n}$ sind, die dritte Parallelschar bildet mit der ersten Winkel, die gleich $2\frac{\pi}{n}$ sind usw. Ist nun der Abstand der Parallelen einer Schar voneinander hinreichend klein, und sind die Ziehkanten unserer Papierstreifen parallel den Mittellinien, dann ist die Anwendung des Papiers evident.

Da auf dem Spezialpapier nicht gezeichnet wird, kann ein Bogen für beliebig viele Analysen benutzt werden. Um eine zu große Anhäufung von Geraden auf unserem Spezialpapier zu vermeiden, kann man die Werte d_ν bzw. s_ν auf der Mittellinie eines durchsichtigen Papierstreifens abtragen und auf diesem Papierstreifen Parallelen zur Mittellinie ziehen. (Man benutzt zweckmäßig einen Streifen durchsichtiges Millimeterpapier.) Die Parallelen unseres Spezialpapiers dürfen einen so großen Abstand voneinander haben, als der Papierstreifen breit ist.

Sind die d_ν bzw. s_ν zum Teil negativ, so hat man bei der Abtragung auf der Mittellinie des Papierstreifens auf das Vorzeichen zu achten. Im übrigen ist das Verfahren auch in diesem Falle evident.

Hat man die Größen d_ν bzw. s_ν in der Einheit l aufgetragen, so hat man die Koordinaten der Endpunkte der Additionsstreckenzüge ebenfalls in derselben Einheit zu messen. Eine Division der Koordinaten durch n liefert die betreffenden Koeffizienten.

Um zu vermeiden, daß für die Summe $\sum_{\nu=1}^{n} s_\nu$ ein zu langes Lineal notwendig wird, kann man zweckmäßig $\sum_{\nu=1}^{n} (s_\nu + t_\nu)$ abtragen, ($t_\nu = t_{\nu-1} = t$) wo t so zu wählen ist, daß $\sum_{\nu=1}^{n} (s_\nu + t_\nu) \sim 0$ wird. Die zu bestimmenden Koeffizienten ändern sich dadurch nicht, denn es ist $\sum_{\nu=1}^{n} t_\nu \cdot e^{\alpha \frac{\pi}{n} \nu i} = 0$, da α hier gerade ist.

Die Methode ist so durchsichtig, daß grobe Fehler so gut wie ausgeschlossen sind.

Unsere Methode zur harmonischen Analyse läßt noch eine wesentliche Vereinfachung zu, wenn $f\left(\frac{\pi}{n}\nu\right) = -f\left(\frac{\pi}{n}\nu + \pi\right)$ ist, ein Fall, der praktisch sehr wichtig ist. In diesem Falle werden alle $s_\nu = 0$ und damit auch alle a_α und b_α mit geradem α. Nun ist d_α und $b_\alpha = 2\,y_\nu$.

Eine andere Vereinfachung ist möglich, wenn n durch 2, also $2n$ durch 4 teilbar ist. Es ist:

$$a_\alpha + b_\alpha i = \frac{1}{n}\left[s_1 \cdot e^{\alpha \frac{\pi}{n} i} + s_2 \cdot e^{\alpha \frac{\pi}{n} 2 i}\right.$$
$$+ \ldots + s_{\frac{n}{2}} \cdot e^{\alpha \frac{\pi}{n} \cdot \frac{n}{2} i}$$
$$+ s_{\frac{n}{2}+1} \cdot e^{\left(\alpha \frac{\pi}{n} + \alpha \frac{\pi}{2}\right) i} + s_{\frac{n}{2}+2} \cdot e^{\left(\alpha \frac{\pi}{n} 2 + \alpha \frac{\pi}{2}\right) i}$$
$$\left. + \ldots + s_n \cdot e^{\left(\alpha \frac{\pi}{n} \cdot \frac{n}{2} + \alpha \frac{\pi}{2}\right) i}\right].$$

Bei geradem α ist nun

$$e^{\left(\alpha \frac{\pi}{n} \nu + \alpha \frac{\pi}{2}\right) i} = (-1)^{\alpha/2} \cdot e^{\alpha \frac{\pi}{n} \nu}.$$

Bezeichnen wir

$$s_\nu - s_{\frac{n}{2}+\nu} \text{ mit } ds_\nu \text{ und } s_\nu + s_{\frac{n}{2}+\nu} \text{ mit } ss_\nu,$$

dann folgt

$$\left.\begin{array}{c} a_\alpha + b_\alpha i = \frac{1}{n} \sum\limits_{\nu=1}^{n/2} ds_\nu \cdot e^{\alpha \frac{\pi}{n} \nu i} \\ \text{(wenn } \alpha/2 \text{ ungerade, } \alpha \text{ gerade)} \end{array}\right\} \quad (1),$$

$$\left.\begin{array}{c} a_\alpha + b_\alpha i = \frac{1}{n} \sum\limits_{\nu=1}^{n/2} ss_\nu \cdot e^{\alpha \frac{\pi}{n} \nu i} \\ \text{(wenn } \alpha/2 \text{ gerade, } \alpha \text{ gerade)} \end{array}\right\} \quad (2),$$

$$\left.\begin{array}{c} a_\alpha + b_\alpha i = \frac{1}{n} \sum\limits_{\nu=1}^{n} d_\nu \cdot e^{\alpha \frac{\pi}{n} \nu i} \\ \text{(wenn } \alpha \text{ ungerade)} \end{array}\right\} \quad (3).$$

Nach diesen Gleichungen werden die Koeffizienten jetzt berechnet und es sind drei Papierstreifen notwendig mit den Summen

$$\sum_{\nu=1}^{n/2} ds_\nu, \quad \sum_{\nu=1}^{n/2} ss_\nu \quad \text{und} \quad \sum_{\nu=1}^{n} d_\nu.$$

Das Schema zur Bildung der ds_ν, ss_ν und d_ν ist jetzt so ($n = 6$):

y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6
y_7	y_8	y_9	y_{10}	y_{11}	y_{12}
d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	d_6
s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6
s_4	s_5	s_6			
ds_1	ds_2	ds_3			
ss_1	ss_2	ss_3			

Liegt die zu analysierende Funktion graphisch vor, so verzichtet man auf diese letzte Vereinfachung. Man rechnet dann nach den Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{c} a_\alpha + b_\alpha i = \frac{1}{n} \sum\limits_{\nu=1}^{n} d_\nu \cdot e^{\alpha \frac{\pi}{n} \nu i} \\ \text{(wenn } \alpha \text{ ungerade)} \end{array}\right\} \quad \text{(I)},$$

$$\left.\begin{array}{c} a_\alpha + b_\alpha i = \frac{1}{n} \sum\limits_{\nu=1}^{n} s_\nu \cdot e^{\alpha \frac{\pi}{n} \nu i} \\ \text{(wenn } \alpha \text{ gerade)} \end{array}\right\} \quad \text{(II)}.$$

Die Größen d_ν und s_ν kann man durch Uebertragung mit dem Absteckzirkel leicht bilden.

B. Synthese. Für die Synthese verfahren wir so:

$$\begin{aligned} y = \varphi(x) = a_0 &+ a_1 \cos x + a_2 \cos 2x \ldots \\ &+ a_{n-1} \cos (n-1) x + a_n \cos n x \\ &+ b_1 \sin x + b_2 \sin 2x \ldots \\ &+ b_{n-1} \sin (n-1) x, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{y} = \varphi(2\pi - x) = a_0 &+ a_1 \cos x + a_2 \cos 2x \ldots \\ &+ a_{n-1} \cos (n-1) x + a_n \cos n x \\ &- b_1 \sin x - b_2 \sin 2x \ldots \\ &- b_{n-1} \sin (n-1) x, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} {}^1/_2 (y + \bar{y}) = a_0 &+ a_1 \cos x + a_2 \cos 2x \ldots \\ &+ a_{n-1} \cos (n-1) x + a_n \cos n x, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} {}^1/_2 (y - \bar{y}) = b_1 &\sin x + b_2 \sin 2x \ldots \\ &+ b_{n-1} \sin (n-1) x. \end{aligned}$$

Nun ist

$$2 \cos x = e^{xi} + e^{-xi}, \quad i\, 2 \sin x = e^{xi} - e^{-xi},$$

daher

$$\begin{aligned} y + \bar{y} = 2 a_0 &+ a_1 e^{xi} + a_2 e^{2xi} \ldots \\ &+ a_{n-1} e^{(n-1)xi} + a_n e^{nxi} \\ &+ a_1 e^{-xi} + a_2 e^{-2xi} \ldots \\ &+ a_{n-1} e^{-(n-1)xi} + a_n e^{-nxi}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (y - \bar{y})\, i = b_1 e^{xi} &+ b_2 e^{2xi} \ldots + b_{n-1} e^{(n-1)xi} \\ &- b_1 e^{-xi} - b_2 e^{-2xi} \ldots - b_{n-1} e^{-(n-1)xi}. \end{aligned}$$

Setzen wir

$$s_\alpha = a_\alpha + b_\alpha, \quad d_\alpha = a_\alpha - b_\alpha$$

dann folgt:

$$\begin{aligned} y + \bar{y} + (y - \bar{y})\, i = 2 a_0 &+ s_1 e^{xi} + s_2 e^{2xi} \ldots \\ &+ s_{n-1} e^{(n-1)xi} + a_n e^{nxi} \\ &+ d_1 e^{-xi} + d_2 e^{-2xi} \ldots \\ &+ d_{n-1} e^{-(n-1)xi} + a_n e^{-nxi}. \end{aligned}$$

Wir können die Funktionswerte nach demselben Prinzip berechnen wie die Koeffizienten. Der Vorteil, den die Benutzung des Spezialpapiers bei der Analyse gewährte, fällt allerdings jetzt fort.

Für die Mitten der Intervalle von der Breite $\frac{\pi}{n}$ ist $x_\nu = \nu \frac{\pi}{2n}$, $\nu = 1, 3, 5, \ldots\ldots (4n-1)$. In diesem Falle ist für die Berechnung der zugehörigen y_ν die Benutzung eines Spezialpapiers zu empfehlen. Das hier zu benutzende Spezialpapier besteht aus $2n$ Parallelscharen, die um die Winkel $\frac{\pi}{2n}$ gegeneinander geschwenkt sind. Man kann das Spezialpapier, das zur Berechnung der Koeffizienten diente, auch hier benutzen, wenn man entweder die noch fehlenden halbierenden Parallelscharen mit einer anderen Farbe einzeichnet, oder ein zweites Koordinatensystem mit einer anderen Farbe einzeichnet, das gegen das ursprüngliche um den Winkel $\frac{\pi}{2n}$ im positiven Sinne gedreht ist, und nun die Glieder von $y_\nu + \bar{y}_\nu + (y_\nu - \bar{y}_\nu)\, i$ zum Teil in dem ursprünglichen, zum Teil in dem neuen Koordinatensystem berechnet und dann die beiden Endvektoren addiert.

Beispiel: Die beiden Abb. 1 und 2 beziehen sich auf die Funktion:

$y_0 = -1,8$	$y_7 = -2,3$
$y_1 = 3,8$	$y_8 = -1,2$
$y_2 = 2,7$	$y_9 = -0,4$
$y_3 = 2,4$	$y_{10} = 0,8$
$y_4 = 1,4$	$y_{11} = 0,4$
$y_5 = 3,2$	$y_{12} = -1,8$
$y_6 = 3,8$	

Zur Bildung der d_ν und s_ν schreiben wir so:

	3,8	2,7	2,4	1,4	3,2	3,8
	−2,3	−1,2	−0,4	0,8	0,4	−1,8
d_ν:	6,1	3,9	2,8	0,6	2,8	5,6
s_ν:	1,5	1,5	2,0	2,2	3,6	2,0
$2\,s_\nu$:	3,0	3,0	4,0	4,4	7,2	4,0

In Abb. 1 sind die d_ν-Werte in der Einheit $l = 1$ cm aufgetragen, in der Abb. 2 ist $l = 2$ cm. Es ergibt sich:

$a_1 = -0,175,$	$b_1 = 1,866,$
$a_2 = 0,1195,$	$b_2 = -0,400,$
$a_3 = -1,475,$	$b_3 = 1,011,$
$a_4 = -0,0733,$	$b_4 = -0,204,$
$a_5 = -1,125,$	$b_5 = 0,562,$
$a_0 = 1,066,$	$a_6 = -0,117.$

Die Rechnung nach dem Rungeschen Verfahren liefert:

$a_1 = -0,182,$	$b_1 = 1,858,$
$a_2 = 0,1166,$	$b_2 = -0,404,$
$a_3 = -1,482,$	$b_3 = 1,016,$
$a_4 = -0,0667,$	$b_4 = -0,202,$
$a_5 = -1,134,$	$b_5 = 0,559,$
$a_0 = 1,066,$	$a_6 = -0,117.$

Die Uebereinstimmung mit obigen Werten ist hinreichend genau. Uebrigens läßt sich die Genauigkeit der graphisch gefundenen Werte durch Vergrößerung des Maßstabes noch bedeutend vergrößern.

Die Koeffizienten a_2, a_4, b_2, b_4 lassen sich hier auch nach den einfacheren Formeln (1), (2) und (3) berechnen, dann ist:

s_ν	1,5	1,5	2,0
	2,2	3,6	2,0
$d s_\nu$	−0,7	−2,1	0,0
$s\,s_\nu$	3,7	5,1	4,0
$2\,s\,s_\nu$	−1,4	−4,2	0,0
$2\,d s_\nu$	7,4	10,2	8,0

Jetzt gilt die Abb. 2a, die auch die Einheit $l = 2$ cm hat. Man beachte die Abtragung der negativen $d s_\nu$-Werte. Die Schwenkungen erfolgen auch hier im positiven Sinne.

J. Groeneveld. 557

BUCHBESPRECHUNGEN

(Die hier angezeigten Bücher sind durch die VDI-Buchhandlung, Berlin SW 19, Beuthstr. 7, zu beziehen.

Dr.-Ing. FRANZ **BERGER** in Wien, Das Gesetz des Kraftverlaufes beim Stoß. Untersuchungen über die gesetzmäßigen Beziehungen beim Stoß elastischer Körper. Mit 67 Abb. Verlag von Friedr. Vieweg & Sohn A.-G., Braunschweig 1924. VII + 191 S. Preis geh. 9 M, geb. 12 M.

Das vorliegende Buch hat nicht den Charakter eines Lehrbuchs, sondern will mehr als eine auf eigenen experimentellen und theoretischen Untersuchungen des Verfassers beruhende Monographie gelten, die einen kleinen Ausschnitt aus der Mechanik elastischer Körper nach allen Richtungen hin ausführlich beleuchtet. Insofern ist es ein vom praktischen und unterrichtlichen Standpunkt durchaus zu begrüßendes Werkchen, das nicht nur dem angehenden Ingenieur ein Musterbeispiel für die gründliche Durcharbeitung eines zwar beschränkten, aber in sich abgeschlossenen Aufgabenbereichs bietet, sondern auch dem schaffenden Ingenieur viel fertiges Gleichungsmaterial an die Hand gibt, das ihm die Durchrechnung solcher zwar nicht schwieriger, aber doch zeitraubender Aufgaben erspart.

Wenn man aber den Titel des Buches liest, so wird man doch zunächst mehr erwarten, als wirklich geboten wird. Das Buch handelt nämlich nur von dem rein elastischen Stoß zweier Körper, der ja, wenn man nur die Beziehung zwischen Kraft und elastischer Deformation an der Stoßstelle annimmt, mit den einfachsten Formen der Newtonschen Gleichungen erledigt werden kann. Das »Gesetz des Kraftverlaufs« ist also nicht etwa ein physikalisches Gesetz, sondern eine aus dem angenommenen elastischen Gesetz für jeden Fall mittels der Newtonschen Gleichungen deduktiv abgeleitete Formel für den zeitlichen Kraftverlauf, die Stoßdauer usw. Die elastische Beziehung wird in Form eines Potenzgesetzes angenommen, wobei die Abweichung vom Hookeschen Gesetz entweder direkt auf Materialeigenschaften zurückzuführen ist, oder auch, wie zuerst von H. Hertz nachgewiesen wurde, daher rührt, daß, auch bei primär gültigem Hookeschem Gesetz, doch wegen der Veränderung der Berührungsfläche der stoßenden Körper während des Stoßvorgangs im Effekt ein anderes Potenzgesetz eintritt, z. B. bei Kugeln die $^3/_2$te Potenz. Die Versuche wurden mit pendelnd aufgehängten, federnden Puffern ausgeführt, für die empirisch gleichfalls ein Potenzgesetz als Grundgesetz festgestellt wurde. Wie zu erwarten, stimmen diese Versuche mit den Rechnungen gut überein.

Um noch weiteres empfehlendes zu sagen, sei auf die ausführliche historische Einleitung hingewiesen; sie stellt mit dankenswerter Gründlichkeit das vorhandene Material dieses Gebiets zusammen, das schließlich in der oben erwähnten (elastostatischen) Ableitung des Hertzschen Gesetzes und einigen anschließenden Untersuchungen gipfelt. Auch die beschriebenen experimentellen Anordnungen dürften für praktische Ingenieure lehrreich sein und vor Fehlern in dieser Richtung warnen.

F. Noether. 640

Prof. Dr. PAUL **SCHREIBER,** Oberreg.-Rat. Wärmemechanik wasserhaltiger Gasgemische mit den Hilfsmitteln der Flächennomographie bearbeitet. Mit 24 Rechentafeln auf logarithmischen Grunddrucken, 10 Rechentafeln auf gleichmäßig geteilten Grunddrucken und 3 Instrumentenskizzen. Verlag von Friedr. Vieweg & Sohn A.-G., Braunschweig 1925. VIII + 195 S. Preis geh. 14 M.

Als Meteorologe hat sich der inzwischen verstorbene Verfasser bemüht, rechnerische und vor allem zeichnerische Verfahren zur Behandlung der Zustandsänderungen und Wärmeumsetzungen in wasserhaltiger Luft zu schaffen. Das vorliegende Buch stellt einen Versuch dar, diese Verfahren auf beliebige Gasgemische mit und ohne Wassergehalt, wie sie in der Technik vielfach Verwendung finden, auszudehnen. Im ersten Teil behandelt der Verfasser die Zustandsgleichungen von Gasen und Wasserdampf und ihren Mischungen und bespricht eingehend ihre zeichnerische Darstellung auf logarithmisch geteiltem Papier, die manche Vorteile gewährt. Die Anwendung der gefundenen Beziehungen auf den Vergasungs- und Verbrennungsvorgang wird kurz gezeigt. Besonders wertvoll ist eine ausführliche Zusammenstellung von Verfahren zur experimentellen Bestimmung des Wassergehaltes in Gasen. Im zweiten Teil werden in ähnlicher Weise die Berechnung und zeichnerische Darstellung von innerer Energie, Wärmeinhalt und Entropie besprochen und die Wärmeumsetzungen bei den verschiedenen Zustandsänderungen trockener und wasserhaltiger Gasgemische behandelt.

Dem Ingenieur liegt die Darstellungsweise des Verfassers nicht, manche ungewohnte Bezeichnungen und Begriffe erschweren das Lesen des Buches. Statt Gas und Dampf einander gegenüberzustellen, spricht der Verfasser von »permanenten« Gasen im Gegensatz zum »Wassergas« (worunter er aber mitunter auch das sonst allgemein als Wassergas bezeichnete Vergasungsprodukt versteht!). Zur Kennzeichnung der Zusammensetzung eines Dampfluftgemisches führt er an Stelle des dem Ingenieur geläufigen und seinen Bedürfnissen angepaßten Wassergehaltes (Gewichtsverhältnis) die »Grundzahl« (Teildruckverhältnis) ein. Statt der Gaskonstanten wird überall, außer beim Wasserdampf mit der auf atmosphärische Luft bezogenen Dichte der Gase gerechnet. Nach meiner Ansicht geht der Verfasser teilweise in der Anwendung von Rechentafeln zu weit. Wenn man mit einer einzigen Einstellung des Rechenschiebers den Endwert unmittelbar ablesen kann, wie z. B. bei der Ermittlung von Wärmeinhalt ($i-i_0=c_p t$) und innerer Energie ($u-u_0=c_v t$) eines Gases, dann ist die Aufzeichnung einer besonderen Rechentafel wohl kaum berechtigt, zumal die spezifischen Wärmen veränderlich und für jedes Gas verschieden sind.

Die vom Verfasser nach verschiedenen Quellen eingesetzten Materialkonstanten sind nicht überall glücklich gewählt. So verwendet er, um ein Beispiel zu nennen, als spezifische Wärme von Luft bei unveränderlichem Druck den Wert $c_p = 0{,}30$ kcal/kg^0, der erst bei sehr hohen Drücken und Temperaturen erreicht wird, während bei niedrigen Drücken und Temperaturen, wie in den Rechenbeispielen ein um rund 30 vH niedrigerer Wert richtig wäre. Daher führen manche der durchgerechneten Beispiele zu recht ungenauen Ergebnissen (z. B. Beispiel 3 und 4, Seite 125).

Dresden. Friedrich Merkel. 633

III. Tagung des Allgemeinen Verbandes der Deutschen Dampfkessel-Überwachungs-Vereine am 16. und 17. Juni 1924 zu Nürnberg. Mit 56 Abb. VdI-Verlag G. m. b. H., Berlin 1925.

Es wird über die mannigfaltigen Verhandlungsgegenstände dieser Tagung berichtet, die alle Interessengebiete des Vereines betreffen, von denen hier insbesondere die Bauvorschriften für Dampfkessel, die Stoffkunde und die der Technischen Chemie angehörigen (Speisewasserreinigung, Rauchgasprüfung u. dgl.) hervorgehoben werden mögen. Die ersteren befassen sich vor allem mit der Festigkeit von Kesselböden und ihrer richtigen Formgebung. Trotz der langjährigen und erfolgreichen Versuchstätigkeit auf diesem Gebiete, die insbesondere C. v. Bach und der Materialprüfungsanstalt in Stuttgart zu verdanken ist, scheint es bis heute nicht gelungen, alle in Betracht kommenden Stellen von der Bedeutung dieser Versuche für eine richtige Formgebung zu überzeugen. Seit langem weiß man und einfache Rechnungen bestätigen es, daß die Krümmungshalbmesser der Krempung des Kesselbodens eine gewisse Größe nicht unterschreiten dürfen. Der Verein ist deshalb bestrebt, typische Bodenformen zu schaffen, die jedes Gefahrmoment ausschließen. Der Bericht zeigt aufs neue, daß es sich auch hier um ein Stoffgebiet handelt, in dem zweckentsprechende Versuche mit theoretischer Forschung verbunden werden muß, um die Unterlagen zu gewinnen, die für eine befriedigende und normative Lösung aller Einzelfragen nötig sind.

Prag. T. Pöschl. 630

A. **FRAENKEL,** Einleitung in die Mengenlehre, 2. Aufl. J. Springer, Berlin 1923. X + 251 S. mit 13 Abb. (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Bd. 9.) Preis broschiert 10,80 RM.

Die in der Sammlung Courant erschienene zweite Auflage der bekannten Fraenkelschen »Einleitung in die Mengenlehre« dürfte das für eine Einführung in die Mengenlehre zurzeit weitaus am besten geeignete Werk darstellen. Die erste Auflage, die aus Unterhaltungen erwachsen ist, die der Verfasser im Felde mit Kriegskameraden geführt hat, ist mit Rücksicht auf das Erscheinen des Buches in den »Grundlehren« bedeutend erweitert und zu einem Lehrbuch der Mengenlehre ausgestaltet worden. Das Buch wendet sich nicht

nur an den Mathematiker und Philosophen, sondern an jeden, der Interesse nimmt an der Schöpfung Georg Cantors, der mathematischen Begründung des Unendlichgroßen. Vorkenntnisse mathematischer oder philosophischer Art werden von dem Leser des Buches nicht gefordert; es kann daher auch dem Physiker und Ingenieur, der der Mathematik ein über die Fragen nach ihrer Anwendbarkeit hinausgehendes Interesse entgegenbringt, aufs wärmste empfohlen werden.

Das Buch enthält zunächst eine außerordentlich anregende, durch zahlreiche Beispiele belebte Darstellung der abstrakten Mengenlehre; die wichtigen Probleme und die grundsätzlich bedeutsamen Punkte, z. B. das Problem der Vergleichbarkeit zweier Mengen, werden dabei besonders betont und von Anfang an scharf herausgearbeitet. Die Anwendungen der Mengenlehre auf Geometrie und Analysis werden, abgesehen von einem verhältnismäßig kurzen, den linearen Punktmengen gewidmeten Paragraphen, mit Recht nur flüchtig gestreift oder überhaupt nicht berührt.

Einen gegenüber der ersten Auflage ganz bedeutend erweiterten Raum nimmt die Behandlung der prinzipiellen Fragen ein, die mit der Grundlegung der Mengenlehre zusammenhängen und die zum Teil das Grenzgebiet zwischen Mathematik und Philosophie berühren. Die Behandlung dieser Fragen beginnt (im § 12: Einwände gegen die Mengenlehre) mit einer Besprechung der Paradoxien. Nach einer kurzen Auseinandersetzung mit zwei charakteristischen philosophischen Standpunkten zum Unendlichen, dem Standpunkt Ziehens einerseits und dem der Marburger Schule, besonders Natorps, andererseits, gibt der Verfasser einen Ueberblick über die wichtigsten Versuche, die seit der Erschütterung des Cantorschen Aufbaus hauptsächlich von mathematischer Seite zur Neubegründung der Mengenlehre unternommen worden sind. Die Darstellung wendet sich zunächst zu den Intuitionisten; nach einer kurzen, äußerst lebendigen historischen Uebersicht werden vor allem die Grundlagen der Position Brouwers charakterisiert. Es folgt die Behandlung der Theorien von Russell und Whitehead, von Julius König und von Zermelo. Eine dieser Theorien, die axiomatische Begründung der Mengenlehre, die zuerst von Zermelo durchgeführt und von Fraenkel selbst in mehreren Arbeiten ergänzt und ausgebaut worden ist, wird in aller Ausführlichkeit behandelt. Das Buch gipfelt in der Besprechung allgemeiner axiomatischer Fragen, namentlich der Forschungen Hilberts und seiner Schüler über die Widerspruchslosigkeit eines Axiomensystems. Auf diese letzten Abschnitte, die Paragraphen 12 bis 14 des Fraenkelschen Buches sei besonders hingewiesen. Sie bieten dem Leser eine außerordentlich fesselnde, eingehende, aber durchaus nicht einseitig orientierte Darstellung einer im lebhaftesten Schwunge begriffenen, die Grundlagen nicht nur der Mengenlehre, sondern der Mathematik überhaupt betreffenden Auseinandersetzung. Man ist dem Verfasser für diese Darstellung, die bis zum Stand der Originalarbeiten beim Erscheinen des Buches und, was den Anteil des Verfassers angeht, darüber hinaus geführt ist, um so mehr zu Dank verpflichtet, als die Originalarbeiten großenteils sehr schwierig gehalten sind und als eine andere zusammenhängende Darstellung wohl kaum vorliegt. Auch der Physiker und Ingenieur wird die Schilderung der tiefgehenden Auseinandersetzungen, die in ihren letzten Konsequenzen selbst manche der von ihm angewendeten Sätze und Schlußweisen der Mathematik in Frage stellen, mit regem Interesse verfolgen.

Berlin. G. Feigl. 643

A. **SCHOENFLIES,** Professor der Mathematik an der Universität Frankfurt. Einführung in die analytische Geometrie der Ebene und des Raumes. Mit 83 Textfiguren. Band XXI der Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften. J. Springer, Berlin 1925. 304 S. Preis geb. 16,50 M.

Die Grundlagen der analytischen Geometrie gehören zu jenen Teilen der Mathematik, die heute jeder Ingenieur beherrschen muß. Man sollte meinen, daß für dieses Gebiet eine ausreichende Auswahl von Lehrbüchern schon längst zur Verfügung steht. Dies ist aber bisher durchaus nicht der Fall gewesen. Es gab fast nur große Werke, die für den Mathematiker bestimmt waren, und auf der anderen Seite einführende Lehrbücher, die den heutigen Anforderungen in keiner Richtung voll gerecht wurden. Das neue Buch von Schoenflies, dem eine reiche und langjährige Lehrerfahrung zu Gebote steht, muß um so dankbarer begrüßt werden. Es gibt auf etwa 300 Seiten in sehr verständlicher und leichtflüssiger Form alles über die ebene und räumliche Geometrie, was der Praktiker brauchen kann. Ohne sich nach irgendeiner Seite auf »Reinheit der Methode« festzulegen, beginnt der Verf. mit den einfachsten Darstellungsarten, Kartesischen Punktkoordinaten, und schreitet allmählich zu den schwierigeren und in den Anwendungen seltener gebrauchten projektiven Koordinaten fort. Daß aber diese wie auch die duale Betrachtungsweise der Linien-Koordinaten sowie die wichtigsten Sätze über kollineare Verwandtschaften mit aufgenommen wurden, muß man auch vom Standpunkt des Ingenieurs, der in der Nomographie mit derlei Dingen heute schon viel zu tun hat, als durchaus dankenswert bezeichnen. In der Raumgeometrie geht das Buch bis zu einer Behandlung der Flächen zweiter Ordnung. In einem kurzen Anhang werden die Hauptsätze der Determinantentheorie, der Lehre von den linearen Gleichungen usf. behandelt. Eine Zusammenstellung von mehr als 100 Beispielen und Aufgaben beschließt das Buch.

Der Verf., der in dem Vorwort sagt, daß er in erster Linie ein »Lernbuch« schreiben, d. h. die Bedürfnisse des Lernenden befriedigen wollte, hat sein Ziel gewiß aufs Beste erreicht.

Mises. 678

AUSBILDUNG UND UNTERRICHT

Vorlesungen über angewandte Mathematik im Sommersemester 1926. Die folgende Zusammenstellung enthält die Vorlesungen und Uebungen, die aus dem Gebiete der angewandten Mathematik und Mechanik im Sommersemester 1926 an den Universitäten und technischen Hochschulen des deutschen Reiches gehalten werden. Nicht aufgeführt sind die regelmäßig wiederkehrenden Jahreskurse an den technischen Hochschulen über höhere Mathematik und darstellende Geometrie sowie die von Physikern gelesenen Vorlesungen über Mechanik an den Universitäten. Die wöchentliche Stundenzahl jeder Vorlesung ist in Klammern beigefügt.

Universitäten.

Berlin. v. Bortkiewicz: Statistische Uebungen (2); Kohlschütter: Höhere Geodäsie I (3); Kopff: Ausgleichungs- und Interpolationsrechnung (2); Eugen Meyer: Ausgewählte Kapitel der technischen Mechanik (2); von Mises: Statik und Kinematik (4), Anfängerpraktikum I (numerisches und instrumentelles Rechnen) (3), Praktikum für Fortgeschrittene I (Darstellende Geometrie und Nomographie) (3), Seminarübungen zur darstellenden Geometrie (2), Anleitung zu wissenschaftlichen Arbeiten für Fortgeschrittene.

Bonn. C. Müller: Einführung in die Geodäsie mit Uebungen (2).

Erlangen. Friedrich Karl Schmidt: Mathematik des Geldverkehrs (2).

Frankfurt a. M. Brendel: Versicherungsmathematik (2); Epstein: Geodäsie (2); Patzig: Elementare Wahrsch. Rechn. (2), Seminar für Versicherungswissenschaft (2); Wissfeld: Geodätische Uebung (2).

Freiburg. Briefs: Allgemeine und Bevölkerungsstatistik (2); Ansel: Vermessungswesen II (Plan- und Geländezeichnen, ganztägig).

Gießen. Falckenberg: Analytische Mechanik, Teil I (4); Fromm: Niedere Geodäsie mit praktischen Uebungen (7); Geppert: Versicherungsrechnung mit Uebungen (2); Uller: Vektoranalysis (2).

Göttingen. Bernstein: Wahrscheinlichkeitsrechnung (4), Versicherungsrechnung mit schriftlichen Uebungen (2), Seminarvorträge über mathemat. Statistik (2); Bessel-Hagen: Darstellende Geometrie (4); Courant: Mathematisches Praktikum für Anfänger (4); Grandjot: Mathematische Unterhaltungen und Spiele (1); Herglotz, Hertz, Bernays: Mathematisches Praktikum für mittlere Semester (2); Nádai: Ausgewählte Fragen der angewandten Mechanik (1); Prandtl: Hydrodynamik und Aerodynamik (4), Anleitung zu selbständigen Arbeiten auf dem Gebiet der angewandten Mechanik (einschl. Hydrodynamik und Aerodynamik); Prandtl und Nádai: Mechanikpraktikum, a) für Anfänger, mit Uebungen im Skizzieren von Maschinenteilen und in der Berechnung von Maschinenelementen (3), b) Festigkeitspraktikum (3); Prandtl, Betz, Nádai: Kolloquium über Fragen der angewandten Mechanik (2); Schuler: Kinematik (2); Wiechert: Einführung in das Vermessungswesen durch praktische Uebungen (2).

Greifswald. Kühne: Statistik I (3 + 2); Schoenberg: Himmelsmechanik (3); Thaer: Eintafelmethoden der darstellenden Geometrie mit Uebungen (3); Vahlen: Nautik (1).

Halle. Behmann: Numerisches Rechnen mit Uebungen (4 + 2); Jahn: Statistische Uebungen (2); Wolff: Statist. Seminar (2).

Hamburg. Dolberg: Methode der kleinsten Quadrate (1); Schorr: Bahnbestimmung der Himmelskörper (2); von Tyszka: Theoretische Statistik (3 + 2); Thomsen: Darstellende Geometrie mit Uebungen (6); Riebesell, Sieveking, Bruck: Versicherungswissenschaftliche Uebungen.

Heidelberg. Gumbel: Bevölkerungsstatistik (3), Statistisches Seminar (2), Die Methoden der Ausgleichung von Massenerscheinungen (2); Rosenthal: Graphische und numerische Methoden der Mathematik (3); Sternberg: Einführung in die mathematische Statistik (1); Vogt: Die Gleichgewichtsfiguren der Himmelskörper (1).

Jena. Auerbach: Lebendige Mathematik (1); Knopf: Geodäsie mit praktischen Uebungen (Geländeaufnahmen, Nivellieren usw.) (2); Müller: Statistik (2 + 2); Winkelmann: Darstellende Geometrie, Teil II (Krumme Gebilde, Axonometrie, Zentralprojektion) (2 + 2), Uebungen in angewandter Mathematik (2), Einführung in die angewandte Mathematik (2 + 1).

Kiel. Löwe: Wirtschaftsstatistik (1); N. N.: Theorie der Bahnbestimmungen (3 + 2); Neuendorff: Graphische und numerische Methoden (4), Uebungen dazu (2), Seminar (2); Steinitz: Mechanik mit Uebungen (4 + 2); Wirtz: Einführung in die mathematische Statistik (2).

Köln. Breuer: Ausgew. Kapitel der Wirtschaftsstatistik (1), Allgemein. Theorie der Statistik (2), Prakt. Uebungen (4), Kolloquium (1); Druxes: Politische Arithmetik (Finanzmathematik (2); Neuhaus: Einführung in die Statistik (2), Bevölkerungsstatistik (2), Statistisches Seminar (2).

Königsberg. Kaluza: Darstellende Geometrie mit Uebungen (5).

Leipzig. Bauschinger: Bahnbestimmung der Himmelskörper (4); Grosse: Versicherungswirtschaft und -Statistik (2); Lorey: Elemente der mathem. Statistik (2 + 1).

München. Böhm: Versicherungswissenschaft. Uebungen im Seminar für Statistik und Versicherungswissenschaft (2), Kaufmännisches Rechnen (1); Großmann: Wahrscheinlichkeitsrechnung und Fehlertheorie (3);

Wilkens: Mechanische Quadratur und Uebungen (3 + 1); Zahn: Statistik (4), Seminar für Statistik (2).

Münster. von Lilienthal: Kinematik (2); Lindow: Sphärische Trigonometrie (3); Schewior: Geodätisches Praktikum (4), geographische Ortsbestimmung mit Uebungen (3).

Rostock. Pohlhausen: Numerische und graphische Methoden (3).

Tübingen. Kommerell: Mechanik II (4), Uebungen zur Mechanik (1).

Würzburg. von Degenfeld: Bevölkerungslehre und Bevölkerungsstatistik (2), Versicherungswissenschaftl. Seminar (2); Rost: Sphärische Astronomie II (4).

Technische Hochschulen.

Aachen. Brandt: Nomographie (2), Uebungen im graphischen Rechnen; Domke: Ausgewählte Kapitel der angewandten Statik (1), Seminar für Statik (1); Gast: Praktische Geometrie I (2), Desgl. II (1), Geodätisches Praktikum, Geodätische Ausarbeitungen (4), Geographische Ortsbestimmung (2 + 2); Hopf: Mechanik II (4), Uebungen dazu (2), Praxis der Differentialgleichungen (2); v. Kármán: Mechanik II (4 + 1), Einleitung zum Flugzeugbau (3), Seminar über ausgewählte Kapitel der Mechanik und der theoret. Physik (zusammen mit Blumenthal und Hopf) (2), Flugzeugstatik (2); Wenner: Photogrammetrie (2).

Berlin. Barneck: Ausgleichungsrechnung (2); Berroth: Ausgleichungsrechnung (2); Döhne: Zwanglaufmechanik (Kinematik) (4), Uebungen dazu (2); Haentzschel: Elemente der Mechanik (4), Uebungen dazu (2); Hamel: Theoretische Mechanik VI (elastische Wellen, plastische Körper) (2), praktisch-mathematische Uebungen im Institut für angewandte Mathematik (zusammen mit Rothe und Willers), Seminar für Mechanik (mit Cranz, Everling, Hertwig, Hort, E. Meyer, Reißner, Rothe, Schachenmeier, Skutsch, Weber) (2); Haußmann: Planzeichnen und Rechenübungen (2), Vermessungskunde I (Forts.): Feldmeßübungen und Ausarbeitung (2 + 6), Vermessungskunde II einschl. geogr.-astron. Ortsbestimmung (2 + 2), Grundzüge der Vermessungskunde (für Studierende d. Arch.-Abt.) (4); von Hofe: Winkelmeßinstrumente und Entfernungsmesser (2); Eugen Meyer: Mechanik IV (4 + 2); Reißner: Mechanik und graph. Statik II (6 + 2); Rothe: Vektoranalysis (3); Schwerin: Ausgewählte Kapitel der technischen Elastizitätslehre (2); Skutsch: Grundzüge der Kinematik (2); Weidert: Geometrische Optik (2), Seminar für optisches Rechnen (2).

Breslau. Feyer: Vermessungskunde I (2 + 2), Vermessungskunde III (Fehlerausgleich) (2 + 2), Spezielle Kapitel aus der darstellenden Geometrie (2 + 2); Milarch: Aerostatik (1); Mann: Mechanik II (4 + 2), IV (2 + 2), Ausgewählte Kapitel aus der Mechanik. Noether: Seminar über mathematische Aufgaben in Physik und Technik (zum Gedächtnis an Felix Klein).

Braunschweig. Eisenmann: Technische Mechanik I (1), desgl. III (1), graphische Statik (2 + 2); Harbert: Geodäsie I (2 + 2), Vermessungsübungen I einschl. Ausarbeitung (4), Desgl. II (10), Ausarbeitung der Vermessungsübungen II (3), Das staatliche Vermessungswesen (1), Kartennetzentwurfslehre (1), Ausgewählte Kapitel aus Vermessungswesen und Kartenkunde nebst Geländeübungen (1); Kesselring: Technische Mechanik (3 + 2); Timerding: Vektoranalysis (2).

Danzig. Lorenz: Einführung in die Mechanik (3 + 2), Hydromechanik (2 + 2); Schilling: Graphische Statik I (2 + 3), Malerische Perspektive und Photogrammetrie (1 + 2); Wyß: Ausgewählte Kapitel aus der Statik II (2).

Darmstadt. Blaeß: Vektorenrechnung (2), Technische Schwingungslehre (2 + 2), Ausgewählte Abschnitte aus der höheren Mechanik (2); Hohenner: Geodäsie (4), Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate (2), Höhere Geodäsie (2), Geodätische Uebungen: I (8), II (1 Halbtag), III (4), Selbständige geodätische Arbeiten nach Anleitung, geodätische Ausarbeitungen; praktische Geometrie (2); Schlink: Mechanik II (4 + 6), Ausgewählte Kapitel aus der höheren Aerodynamik (1), Ausgewählte Kapitel aus der höheren Mechanik (1), Seminar für Mechanik; Wagenbach: Uebungen über Hydraulik (1).

Dresden. Beyer: Technische Mechanik I (4 + 2); Böhmer: Numerisches Rechnen (2), Uebungen zur Versicherungsmathematik (2); Burckhardt: Versicherungswesen (2), Statistische Uebungen (1); Mollier: Uebungen über Kinematik (3); Trefftz: Graphostatik (3 + 2); Werkmeister: Geodäsie für Bauingenieure I (Uebungen: 4), II (5 + 8), Geodäsie für Architekten (4).

Hannover. Grüning: Statik I (3 + 2), II (2 + 1); Kaufmann: Mechanik I (2 + 1), II (4 + 2), Seminar für Mechanik (2); Conrad Müller: Ausgewählte Probleme der Elastizitätstheorie (2); Wilhelm Müller: Anleitung zur Behandlung mechanischer Aufgaben I (2 Uebgstd.), ausgewählte statische und Festigkeitsprobleme (2), theoretische und angewandte Strömungslehre (2), Aufgaben zur Kinematik der Getriebe (2); Oertel: Grundzüge der praktischen Geometrie (2 + 3), Planzeichnen (4 Uebgstd.), Geodäsie I (2 + 6), Grundzüge der astronom. Ortsbezeichnung (2 + 2); Prange: Die mathematischen Hilfsmittel der Elektrotechnik (2); Pröll: Dynamik I (3 + 2), Hydromechanik (2 + 2), Ausgewählte Kapitel der technischen Mechanik (1), Kinematik (2), Statik der Flugzeuge (1); von Sanden: Vektoranalysis (2), numerische Behandlung von Diff.-Gleichungen der Technik (3 + 1), Math. Praktikum (2); A. Schur: Photogrammetrie (2).

Karlsruhe. Furch: Darstellende Geometrie für Chemiker (2 + 1); Heinrich: Ver-

messungskunde II (3), Plan- und Geländezeichnen, Zeichnung geodätischer Instrumente (3); N. N.: Höhere Geodäsie (3), Vermessungsübungen für Bauingenieure (6), für Architekten (3), Geodätisches Praktikum (4 + 3); Plank: Kinematik (2 + 2); Kurt von Sanden: Angewandte Mathematik mit Uebungen (graphische Rechentafeln, Nomographie) (2 + 1), Uebungen in Elementen der graphischen Statik (2), Mechanisches Seminar (3); Schleicher: Ausgewählte Kapitel der Elastizitätstheorie (2), mech. Seminar mit von Sanden (3); Tolle: Technische Mechanik II (4), IV (4); Wellstein: Netzentwürfe geograph. Karten.

München. Finsterwalder: Vektoranalysis (3), Photogrammetrie (2 + 1); L. Föppl: Technische Mechanik II (4 + 2), IV (2 Uebgstd.), Mechanik-Oberstufe II (4 + 2), Praktikum im mech.-techn. Laboratorium; Marx: Kinematik (4 Uebgstd.); Morgenroth: Statistik II (2); Schmachtenberger: Einführung in die politische Arithmetik (2); Max Schmidt: Vermessungskunde II (4), Praktikum II (4 oder 8), Hauptvermessungsübungen; Schlötzer: Rechenbeispiele zu ausgewählten Kapiteln der Geodäsie (2), Ausgleichungsrechnung (2 + 1).

Stuttgart. Grammel: Techn. Mechanik (3 + 2); Haller: Vermessungskunde II (5); Kriemler: Technische Mechanik (6 + 4), Flugzeugstatik (1); N. N.: Feldübungen zur Vermessungskunde (12), Ausarbeitung der Aufnahmen zur Vermessungskunde (2), Geodätische Uebungen für Studierende der Geodäsie (5), für Lehramtskandidaten (3), Ausgleichungsrechnung (2 Uebgstd.), Uebungen zur höheren Geodäsie.

Berlin. F. Rehbock. 666

Aus dem Unterrichtsprogramm des Instituts für angewandte Mathematik der Universität Berlin. Das unter Leitung von Prof. v. Mises stehende Institut für angewandte Mathematik der Universität Berlin veröffentlicht ein Unterrichtsprogramm, dessen wichtigste Teile, soweit sie auf allgemeines Interesse rechnen können, hier zusammengestellt sein mögen[1]).

Neben der Durchführung und Förderung wissenschaftlicher Forschungsarbeiten sowie der Ausführung einschlägiger Arbeiten auf Antrag für wissenschaftliche und technisch-industrielle Zwecke will das Institut in erster Linie den Unterrricht auf allen Gebieten der angewandten Mathematik pflegen und die Studierenden in den numerischen, zeichnerischen und instrumentellen Verfahren der höheren Mathematik ausbilden. Dieser Unterricht wendet sich an verschiedene Gruppen von Studierenden: An die reinen Mathematiker, denen die Fühlung mit den Nachbarfächern, vorzüglich mit der Physik, erleichtert und die Bekanntschaft mit jenen Problemen vermittelt werden soll, aus denen die Mathematik neue Anregungen für ihre Weiterentwicklung schöpfen muß; an die Physiker, denen etwa durch Vorlesungen über Differential- und Integralgleichungen der Physik, über Wahrscheinlichkeitsrechnung, geometrische Optik oder Thermodynamik eine Ergänzung und mathematische Vertiefung des physikalischen Unterrichts geboten wird; an Astronomen, Geodäten, Meteorologen, die durch ein Studium der angewandten Mathematik vor allem die Eingliederung ihrer speziellen Untersuchungsgebiete in allgemeine Zusammenhänge erkennen sollen; endlich aber an eine beschränkte Zahl von solchen, die sich zu angewandten Mathematikern heranbilden, also auf der Grundlage einer umfassenden mathematischen Ausbildung den Problemen eines Anwendungsgebietes nachgehen oder mathematische Theorien nach der Seite der Anwendung hin ausbauen wollen; sie sollen vertraut werden mit allen modernen Rechnungsverfahren und so auch imstande sein, den — zahlenmäßig nicht großen — Bedarf an angewandten Mathematikern in der Industrie zu decken.

Der Unterricht gliedert sich in Vorlesungen, Praktika, Seminarübungen und Anleitung zu wissenschaftlichen Arbeiten. Vorlesungen und Praktika wiederholen sich regelmäßig in sechssemestrigem Kursus (das Anfängerpraktikum nach Bedarf auch öfter); die Seminarübungen schließen jedesmal an den Vorlesungsstoff des vergangenen Semesters oder einen bestimmt herausgegriffenen Teil desselben an. In jedem Semester wird eine vier- bis fünfstündige Hauptvorlesung und eine zwei- bis dreistündige Nebenvorlesung gehalten.

Die 6 Hauptvorlesungen sind: Semester 1. Darstellende Geometrie; Semester 2. Statik und Kinematik; Semester 3. Mechanik; Semester 4. Praktische Analysis; Semester 5. Differential- und Intergralgleichungen der Mechanik und Physik; Semester 6. Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung in der Physik. Die gleichlaufenden Nebenvorlesungen: Semester 1. Graphische Verfahren; Semester 2. Thermodynamik; Semester 3. Vektor- und Tensorrechnung; Semester 4. Neuere Hydro- und Aeromechanik; Semester 5. Geometrische Optik; Semester 6. Einführung in die Flugtechnik.

Ueber die nötigen Vorkenntnisse und den Inhalt der Vorlesungen gibt das Unterrichtsprogramm nähere Auskunft. Die Uebersicht über den im mathematischen Praktikum behandelten Stoff sei hier vollständig wiedergegeben, da nur an wenigen deutschen Universitäten derartige Praktika existieren. Sie sind zum ersten Mal von Prof. v. Mises im Jahre 1921 eingeführt worden und werden — wie ich aus eigener Anschauung weiß — von den Studierenden als sehr nützlich empfunden.

Das Anfängerpraktikum, das den Besuch bestimmter Vorlesungen aus dem Gebiet der angewandten Mathematik nicht voraussetzt, erstreckt sich über zwei Semester und behandelt

a) Numerisches und instrumentelles Rechnen. Theorie des abgekürzten Rechnens, Rechenschieber, Rechenmaschinen, tabel-

[1]) Das Unterrichtsprogramm kann gegen Voreinsendung von ℳ 1,— durch das Institut für angewandte Mathematik bezogen werden.

larisches Rechnen; Interpolation; Auflösung von Gleichungen dritten und vierten Grades und von einfachen Systemen linearer Gleichungen; Behandlung algebraischer und transzendenter Gleichungen; Verfahren der Näherungsfolgen.

b) Graphisches Rechnen und Elemente der darstellenden Geometrie. Die einfachen Rechnungsarten in zeichnerischer Ausführung, Diagramme; zeichnerische Auflösung von algebraischen und transzendenten Gleichungen mit einer und mehreren Unbekannten. — Grund- und Aufrißverfahren einfacher Gebilde; Axonometrie, besonders mit Rücksicht auf die stereometrischen Aufgaben des Schulunterrichts.

In dem viersemestrigen Praktikum für Fortgeschrittene werden folgende Gebiete, zum Teil im Anschluß an die jedesmal genannten Vorlesungen, behandelt:

a) Darstellende Geometrie und Nomographie. (Hauptvorlesung 1 und eventuell Nebenvorlesung 1.) Grund- und Aufrißverfahren: Kegel, Zylinder, Kugel; Dreh- und Schraubenflächen; Schattenkonstruktionen. Kotierte Projektion; allgemeine Axonometrie. Perspektive. Entwerfen von Nomogrammen für drei und mehr Veränderliche, Lösung schwierigerer nomographischer Aufgaben.

b) Mechanik und Ausgleichsrechnung. (Hauptvorlesung 3, Nebenvorlesung 3.) Uebungen zur Vektoranalysis. Punktmechanik; Mechanik starrer Körper; Tensoranalysis. Mechanik der Kontinua. — Einfache Aufgaben der direkten und indirekten Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate.

c) Graphische Statik und mechanische Quadratur. (Hauptvorlesung 2, eventuell auch 4.) Grundaufgaben der ebenen Statik. Balken und Fachwerke. Kinematische Methoden. Massengeometrie, Momente 1. und 2. Grades. Elemente der Raumstatik. Graphische Quadratur im Anschluß an die statischen Methoden. Planimeter. Numerische Quadratur, Verfahren von Cotes, Gauß; asymptotische und kombinierte Verfahren.

d) Differentialgleichungen. (Hauptvorlesung 4, eventuell auch 5.) Harmonische Analyse. Numerische und zeichnerische Integration der gewöhnlichen Differentialgleichungen erster und zweiter Ordnung. Randwert- und Eigenwertprobleme der Potentialgleichung und der allgemeinen elliptischen Gleichung. Hyperbolische Gleichungen.

Die Seminarübungen schließen regelmäßig an eine der Vorlesungen des vorhergehenden Semesters an. Sie haben den Zweck, die Kenntnis des vorgetragenen Stoffes zu vertiefen und die Teilnehmer in das Studium der Originalliteratur einzuführen.

Besonders darauf hingewiesen wird, daß alle, die angewandte Mathematik im Hauptfach studieren, ihre Ausbildung in praktischer Richtung durch Besuch einschlägiger Vorlesungen und Uebungen an der technischen Hochschule ergänzen müssen. Eine Ergänzung wird ferner geboten durch den sechssemestrigen Kursus über theoretische Physik an der Universität, durch astronomische Vorlesungen, etwa über Himmelsmechanik oder Ausgleichsrechnung, endlich durch regelmäßige Kurse aus dem Gebiet der Geodäsie. Die aus dem Institut in der sechsjährigen Zeit seines Bestehens hervorgegangenen Publikationen, die zum großen Teil in dieser Zeitschrift erschienen sind oder noch erscheinen werden, sind am Schluß des Programmes verzeichnet.

Berlin. F. Rehbock. 669

NACHRICHTEN

Jubiläum des Hüttentaschenbuchs. Vom Taschenbuch »Hütte«, das jedem Ingenieur aufs Beste bekannt ist, ist soeben der 1. Band in 25. Auflage erschienen. Zugleich feiert der Akademische Verein »Hütte« die 70. Wiederkehr des Tages, an dem der Beschluß zur Herausgabe des Taschenbuches gefaßt worden ist. Ein Studium der aufeinanderfolgenden Auflagen der »Hütte« gibt einen ausgezeichneten Einblick in die Entwicklung der technischen Wissenschaften. Man braucht nur die ersten Abschnitte, die der Mathematik und der Mechanik gewidmet sind, zu verfolgen, um zu sehen, wie sich die Hilfsmittel, deren sich der Ingenieur bedient, erweitern, vertiefen und vor allem den Anforderungen der Praxis anpassen. Vor mir liegt z. B. die im Jahre 1872 erschienene, noch einbändige 9. Auflage. Die Hydrodynamik wird hier auf etwa 20 Seiten abgehandelt. Das Kapitel beginnt mit der Anführung der vier Eulerschen Gleichungen, die wie eine formelle Achtungsbezeigung vor der Theorie erscheinen. Der ganze übrige Text beschränkt sich auf die Zusammenstellung empirischer Einzelresultate über Ausfluß- und Widerstandszahlen. Damit vergleiche man nun die von A. Betz-Göttingen bearbeitete Hydrodynamik in der jetzt erscheinenden, auf 4 Bände berechneten, 25. Auflage. Gewiß fehlen auch hier nicht die für den ausführenden Ingenieur sehr wichtigen empirischen Zahlenwerte, aber diese sind miteinander und mit den theoretischen Grundlagen durch eine vertiefte Gesamtauffassung verknüpft, wie sie der erst in den letzten Jahrzehnten erfolgten Entwicklung entspricht. Selbstverständlich wird auch auf die Fragen, die die moderne Flugtechnik mit sich gebracht hat, entsprechend ausführlich eingegangen. — Der ganze erste Band der »Hütte« kann als ein kurz gefaßtes und überaus reichhaltiges Handbuch der »angewandten Mathematik und Mechanik« angesehen werden. Er umfaßt neben den hauptsächlichsten mathematischen Grundbegriffen eine kurze Darstellung der gesamten Mechanik, der Akustik, Optik, der Wärmelehre, eine aus-

führliche Stoffkunde, einen Abriß der Geodäsie und eine Darstellung der Grundlagen technischer Messungen. Man kann den Akademischen Verein »Hütte« zu seinem Jubiläum und zu dessen literarischem Ausdruck nur beglückwünschen. Mises. 673

Internationaler Kongreß für technische Mechanik in Zürich. Das Züricher Organisationskomitee bestehend aus den Herren: P. Debye, E. Meißner, E. Meyer-Peter, F. Prasil, A. Rohn, A. Stodola versendet die Einladung zum zweiten Internationalen Kongreß für technische Mechanik, der, wie hier schon mitgeteilt, in Zürich vom 12. bis 18. September tagen wird. Für die allgemeinen Sitzungen sind folgende Vorträge vorgesehen:

P. W. Bridgman-Cambridge U.S.A.: The Effects of Pressure on Properties of Matter.

Camichel-Toulouse: La théorie des coups de bélier.

Debye-Zürich: Molekulare Kräfte.

P. W. Jones-Cambridge (England): The Central of Stalled Aeroplanes.

Jouguet-Paris: La théorie thermodynamique de la propagation des explosions.

v. Kármán-Aachen: Elastische Grenzprobleme (Erddruck, Plastizität).

Levi-Civita-Rom: Sur les chocs dans le problème des trois corps.

Meißner-Zürich: Elastische Oberflächenwellen.

Ostenfeld-Kopenhagen: (Ein noch unbestimmtes Thema aus der Baustatik).

Prandtl-Göttingen: Zur ausgebildeten Turbulenz.

Stodola-Zürich: Die praktisch wertvollen Leistungen der technischen Mechanik und einige ihrer künftigen Aufgaben.

G. I. Taylor-Cambridge (England): The Distorsion of single Crystals of Metals.

Der Einladung schließt sich das Internationale Komitee an, das durch Zuwahl mehrerer Mitglieder aus den bisher nicht vertreten gewesenen Ländern ergänzt wurde und nunmehr aus folgenden Herren besteht:

Deutschland: v. Kármán- Aachen, v. Mises-Berlin, Prandtl-Göttingen.

England: Bairstow-London, Coker-London, Griffith-Farnborough, Southwell-Teddington, Taylor-Cambridge.

Frankreich: Hahn-Nancy, Jouguet-Paris, Koenigs-Paris, Villat-Strasbourg.

Italien: Levi-Civita-Rom, Guidi-Torino.

Holland: Biezeno-Delft, Burgers-Delft, Schouten-Delft, Wolff-Amsterdam.

Belgien: Baes-Bruxelles.

Schweiz: Meißner-Zürich, Stodola-Zürich.

Oesterreich: Forchheimer-Wien.

Tschecho-Slowakei: Pöschl-Prag.

Norwegen: Bjerknes-Bergen.

Schweden: Oseen-Uppsala.

U. S. A.: Ames-Baltimore, Hunsaker-Washington.

Gesellschaft für angewandte Mathematik und Mechanik. Die Ortsgruppe Berlin hielt am 6. Mai im Erweiterungsbau der Technischen Hochschule Berlin eine Versammlung ab, in der Prof. Dr. H. Reissner über »Festigkeit einholmiger Tragflügel« sprach. Dem Vortrag, dessen Inhalt in der Zeitschrift für Flugtechnik und Motorluftschiffahrt erscheinen wird, folgte eine überaus lebhafte und angeregte Aussprache, an der sich zahlreiche Vertreter der Statik und der Flugtechnik beteiligten. — Am Freitag, den 4. Juni spricht Prof. Dr. Gröber von der technischen Hochschule Berlin über »Wärmeleitung, Wärmeübergang und Wärmestrahlung — Aufgaben der Technik und Wege zu ihrer Lösung«.

Persönliches. Der o. Prof. der Mathematik an der Universität Rostock, Dr. Ernst Pohlhausen ist in gleicher Eigenschaft an die Technische Hochschule in Danzig berufen worden.

Der Privatdozent für Mechanik an der Technischen Hochschule in Dresden, Prof. Dr. Alt, hat einen Ruf an die Deutsche Technische Hochschule in Brünn als Nachfolger von Prof. Federhofer erhalten.

Herr Dr. Harry Schmidt, Prof. am Polytechnikum Cöthen-Anhalt, hat sich an der Universität Leipzig für theoretische und angewandte Mechanik habilitiert.

Der o. Professor für Luftschiffahrt und Automobilwesen, Ing. Richard Knoller an der Technischen Hochschule in Wien, der Erbauer und Leiter der aeromechanischen Versuchsanstalt, der zu den ältesten Vertretern der wissenschaftlichen Flugtechnik gehörte, ist am 4. März d. Js. im 57. Lebensjahre gestorben.

Am 19. April verschied in Genf im 53. Lebensjahre Herr A. A. Tschuprow, früher o. Professor der mathematischen Statistik in Petersburg, einer der bedeutendsten Vertreter seines Faches.

Prof. Dr. v. Kármán-Aachen wird im Herbst d. Js. nach Japan reisen zur Abhaltung von Vorträgen über Grundlagen der Flugtechnik und zur Beratung der zuständigen Stellen in Fragen der Einrichtung des flugtechnischen Versuchswesens.

Herr Prof. Dr. Kyrill Popoff von der Universität Sofia hält im laufenden Sommer-Semester im Institut für angewandte Mathematik an der Universität Berlin eine Gastvorlesung über »Die Integrationsmethoden von Poincaré und ihre Anwendung in dem Hauptproblem der äußeren Ballistik«. 673

(Redaktionsschluß 31. Mai 1926.)

Für die Schriftleitung verantwortl.: Professor Dr. von Mises, Berlin W 30, Neue Winterfeldtstraße 43; für den Anzeigenteil: Peter Valerius, Berlin NW 40. — VDI-Verlag G. m. b. H., Berlin NW 7. Druck von A. W. Schade, Berlin N 39.